

1 Условия задачи

$$U_{tt} = a^2 \Delta U \quad (1)$$

$$U|_{r=r_0} = 0 \quad (2)$$

$$U_t|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

$$U|_{t=0} = A \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \quad (4)$$

2 Перевод уравнения колебаний в полярные координаты

$$U = U(t, r, \varphi) \quad U(t, r, \varphi) = U(t, r, \varphi + 2\pi) \quad (5)$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (6)$$

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = U_{rr} + \frac{1}{r^2} U_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} U_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \frac{1}{r^2} U_{\varphi\varphi} \quad (7)$$

(см задачу 60)

$$\frac{1}{a^2} U_{tt} = U_{rr} + \frac{1}{r^2} U_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} U_r \quad (8)$$

3 Решение разделением переменных

Решаем разделением переменных уравнение колебаний с граничными условиями, но без начальных.

$$U(t, r, \varphi) = T(t) R(r) \Phi(\varphi) \quad (9)$$

Из (5)

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \quad (10)$$

$$\frac{1}{a^2} R \Phi T'' = \Phi T R'' + \frac{1}{r^2} T R \Phi'' + \frac{1}{r} T \Phi R' \Big| \cdot \frac{1}{T R \Phi} \quad (11)$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = \varkappa \quad (12)$$

$$\varkappa'_t = 0, \quad \varkappa'_r = \varkappa'_\varphi = 0, \quad \implies \quad \varkappa = const \quad (13)$$

3.1 Пространственная часть

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = \varkappa \quad (14)$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} - \varkappa r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu \quad (15)$$

$$\mu = const$$

3.1.1 Угловая часть

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu \quad (16)$$

Из (16) при условии (10), как в задаче 60 получаем

$$\mu = n^2 \quad (17)$$

$$\Phi_n = C_n^1 \cos(n\varphi) + C_n^2 \sin(n\varphi), \quad (18)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

3.1.2 Радиальная часть

Подставим (17) в (15):

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} - \varkappa r^2 = n^2 \quad (19)$$

$$r^2 R'' + r R' - \varkappa r^2 R - R n^2 = 0 \quad (20)$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \varkappa R - \frac{n^2}{r^2} R = 0 \quad (21)$$

Замена

$$r = \frac{\rho}{\sqrt{-\varkappa}}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{-\varkappa}}{\rho} \quad (22)$$

$$R' = \frac{dR}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{dR}{d\rho} \sqrt{-\varkappa}, \quad R'' = \frac{d}{dr} \left(\frac{dR}{d\rho} \sqrt{-\varkappa} \right) = \sqrt{-\varkappa} \frac{d^2 R}{d\rho^2} \frac{d\rho}{dr} = -\varkappa \frac{d^2 R}{d\rho^2} \quad (23)$$

$$-\varkappa \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\sqrt{-\varkappa}}{\rho} \frac{dR}{d\rho} \sqrt{-\varkappa} - \varkappa R - n^2 \left(\frac{\sqrt{-\varkappa}}{\rho} \right)^2 R = 0 \quad (24)$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (25)$$

$$R = C^3 J_n(\rho) = C^3 J_n(\sqrt{-\varkappa} r) \quad (26)$$

Из (2) следует

$$R(r_0) = 0 \quad (27)$$

$$J_n(\sqrt{-\varkappa} r_0) = 0 \implies \sqrt{-\varkappa} r_0 = \mu_k^{(n)} \implies \sqrt{-\varkappa} = \frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (28)$$

$$\varkappa = - \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} \right)^2 \quad (29)$$

$$R_{nk} = C_{nk}^3 J_n \left(\mu_k^{(n)} \frac{r}{r_0} \right) \quad (30)$$

3.2 Временная часть

Подставим (29) в (12)

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = - \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} \right)^2 \quad (31)$$

$$T'' = - \left(\frac{\mu_k^{(n)} a}{r_0} \right)^2 T \quad (32)$$

$$T_{nk} = C_{nk}^4 \cos \left(\frac{\mu_k^{(n)} a}{r_0} t \right) + C_{nk}^5 \sin \left(\frac{\mu_k^{(n)} a}{r_0} t \right) \quad (33)$$

Общее решение такое:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{nk} R_{nk} \Phi_n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_{nk}^4 \cos \left(\frac{\mu_k^{(n)} a}{r_0} t \right) + C_{nk}^5 \sin \left(\frac{\mu_k^{(n)} a}{r_0} t \right) \right] C_{nk}^3 J_n \left(\mu_k^{(n)} \frac{r}{r_0} \right) [C_n^1 \cos(n\varphi) + C_n^2 \sin(n\varphi)] \end{aligned} \quad (34)$$

4 Начальные условия

4.1 Начальная скорость

$$U_t|_{t=0} = 0 \quad \implies \quad C_{nk}^5 = 0. \quad (35)$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \neq 0 \\ 2\pi, & n = m = 0 \end{cases} & \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \neq 0 \\ 0, & n = m = 0 \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_{nk}^5 \frac{\mu_k^{(n)} a}{r_0} \right] C_{nk}^3 J_n \left(\mu_k^{(n)} \frac{r}{r_0} \right) [C_n^1 \cos(n\varphi) + C_n^2 \sin(n\varphi)] \right] = 0 \quad (37)$$

Теперь воспользуемся ортогональностью функций Бесселя:

$$\int_0^{r_0} J_m \left(\mu_n^{(m)} \frac{r}{r_0} \right) J_m \left(\mu_k^{(m)} \frac{r}{r_0} \right) r dr = \delta_{kn} \frac{r_0^2}{2} [J_m'(\mu_n^{(m)})]^2. \quad (38)$$

Домножим и проинтегрируем:

$$\int_0^{r_0} dr r J_m \left(\mu_n^{(m)} \frac{r}{r_0} \right) \cdot \left[K \pi \sum_{k=1}^{\infty} C_{mk}^5 \frac{\mu_k^{(m)} a}{r_0} C_{mk}^3 J_m \left(\mu_k^{(m)} \frac{r}{r_0} \right) C_m^1 \right] = 0, \quad K = 1, 2; \quad m = 0, 1, \dots \quad (39)$$

$$C_{mn}^5 \frac{\mu_n^{(m)} a}{r_0} C_{mn}^3 C_m^1 \frac{r_0^2}{2} \left[J_m' \left(\mu_n^{(m)} \right) \right]^2 = 0, \quad (40)$$

$$C_{mn}^5 C_m^1 = 0. \quad (41)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \sin(m\varphi) \cdot \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_{nk}^5 \frac{\mu_k^{(n)} a}{r_0} \right] C_{nk}^3 J_n \left(\mu_k^{(n)} \frac{r}{r_0} \right) [C_n^1 \cos(n\varphi) + C_n^2 \sin(n\varphi)] \right| = 0 \quad (42)$$

$$\int_0^{r_0} dr r J_m \left(\mu_n^{(m)} \frac{r}{r_0} \right) \cdot \left| \pi \sum_{k=1}^{\infty} C_{mk}^5 \frac{\mu_k^{(m)} a}{r_0} C_{mk}^3 J_m \left(\mu_k^{(m)} \frac{r}{r_0} \right) C_m^2 \right| = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (43)$$

$$C_{mn}^5 \frac{\mu_n^{(m)} a}{r_0} C_{mn}^3 C_m^2 \frac{r_0^2}{2} \left[J_m' \left(\mu_n^{(m)} \right) \right]^2 = 0, \quad (44)$$

$$C_{mn}^5 C_m^2 = 0. \quad (45)$$

Подставим в (34):

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left(\frac{\mu_k^{(n)} a}{r_0} t \right) J_n \left(\mu_k^{(n)} \frac{r}{r_0} \right) [C_{nk}^4 C_{nk}^3 C_n^1 \cos(n\varphi) + C_{nk}^4 C_{nk}^3 C_n^2 \sin(n\varphi)] =$$

обозначим $C_{nk}^4 C_{nk}^3 C_n^1 \equiv C_{nk}^6$, $C_{nk}^4 C_{nk}^3 C_n^2 \equiv C_{nk}^7$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left(\frac{\mu_k^{(n)} a}{r_0} t \right) J_n \left(\mu_k^{(n)} \frac{r}{r_0} \right) [C_{nk}^6 \cos(n\varphi) + C_{nk}^7 \sin(n\varphi)]. \quad (46)$$

4.2 Начальное отклонение

$$U|_{t=0} = A \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \quad (47)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left(\mu_k^{(n)} \frac{r}{r_0} \right) [C_{nk}^6 \cos(n\varphi) + C_{nk}^7 \sin(n\varphi)] = A \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \quad (48)$$

4.2.1 Смерть угловой части

sin:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left(\mu_k^{(n)} \frac{r}{r_0} \right) \int_{-\pi}^{\pi} [C_{nk}^6 \cos(n\varphi) + C_{nk}^7 \sin(n\varphi)] \sin(m\varphi) d\varphi = A \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\varphi) d\varphi \quad (49)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left(\mu_k^{(n)} \frac{r}{r_0} \right) C_{nk}^7 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi = A \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\varphi) d\varphi \quad (50)$$

$m \neq 0$

$$\int_0^{r_0} dr r J_m \left(\mu_n^{(m)} \frac{r}{r_0} \right) \cdot \left| \sum_{k=1}^{\infty} J_m \left(\mu_k^{(m)} \frac{r}{r_0} \right) C_{mk}^7 \pi \right| = 0, \quad (51)$$

$$C_{mn}^7 \frac{r_0^2}{2} \left[J_m' \left(\mu_n^{(m)} \right) \right]^2 = 0, \quad (52)$$

$$C_{mn}^7 = 0. \quad (53)$$

Подставим в (46) и получим новый вид решения:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left(\frac{\mu_k^{(n)} a}{r_0} t \right) J_n \left(\mu_k^{(n)} \frac{r}{r_0} \right) C_{nk}^6 \cos(n\varphi). \quad (54)$$

Начальное условие (4) превратится в

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left(\mu_k^{(n)} \frac{r}{r_0} \right) C_{nk}^6 \cos(n\varphi) = A \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right). \quad (55)$$

cos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left(\mu_k^{(n)} \frac{r}{r_0} \right) C_{nk}^6 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi = A \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi) d\varphi \quad (56)$$

$m \neq 0$

$$\int_0^{r_0} dr r J_m \left(\mu_n^{(m)} \frac{r}{r_0} \right) \cdot \left| \sum_{k=1}^{\infty} J_m \left(\mu_k^{(m)} \frac{r}{r_0} \right) C_{mk}^6 \right| \pi = 0 \quad (57)$$

$$C_{mn}^6 \frac{r_0^2}{2} \left[J_m' \left(\mu_n^{(m)} \right) \right]^2 = 0 \quad (58)$$

$$C_{mn}^6 = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (59)$$

и (54) превратится в

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left(\frac{\mu_k^{(n)} a}{r_0} t \right) J_n \left(\mu_k^{(n)} \frac{r}{r_0} \right) C_{nk}^6 \cos(n\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left(\frac{\mu_k^{(0)} a}{r_0} t \right) J_n \left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{r_0} \right) C_{0k}^6. \quad (60)$$

4.2.2 Нахождение оставшихся коэффициентов C_{0k}^6

Теперь пусть в (56) $m = 0$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_0 \left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{r_0} \right) C_{0k}^6 2\pi = A \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) 2\pi, \quad (61)$$

$$\int_0^{r_0} dr r J_0 \left(\mu_n^{(0)} \frac{r}{r_0} \right) \cdot \left| \sum_{k=1}^{\infty} J_0 \left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{r_0} \right) C_{0k}^6 \right| = A \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad (62)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{0k}^6 \int_0^{r_0} J_0 \left(\mu_n^{(0)} \frac{r}{r_0} \right) J_0 \left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{r_0} \right) r dr = A \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) J_0 \left(\mu_n^{(0)} \frac{r}{r_0} \right) r dr. \quad (63)$$

Далее будут активно использоваться формулы

$$\frac{\nu}{x} J_\nu - J'_\nu = J_{\nu+1}, \quad \frac{\nu}{x} J_\nu + J'_\nu = J_{\nu-1}.$$

Левая часть (63):

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{0k}^6 \int_0^{r_0} J_0 \left(\mu_n^{(0)} \frac{r}{r_0} \right) J_0 \left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{r_0} \right) r dr = \sum_{k=1}^{\infty} C_{0k}^6 \delta_{nk} \frac{r_0^2}{2} [J'_0(\mu_n^{(0)})]^2 = C_{0n}^6 \frac{r_0^2}{2} [J'_0(\mu_n^{(0)})]^2 =$$

$$J'_0 = -J_1$$

$$= C_{0n}^6 \frac{r_0^2}{2} [J_1(\mu_n^{(0)})]^2. \quad (64)$$

Правая часть(63) без A и с заменой

$$\mu_n^{(0)} \frac{r}{r_0} = \rho; \quad r = \frac{r_0}{\mu_n^{(0)}} \rho :$$

$$\int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) J_0 \left(\mu_n^{(0)} \frac{r}{r_0} \right) r dr = \left(\frac{r_0}{\mu_n^{(0)}} \right)^2 \int_0^{\mu_n^{(0)}} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\mu_n^{(0)}} \right)^2 \right) J_0(\rho) \rho d\rho =$$

с учётом $J_0(\rho) = \frac{1}{\rho} J_1(\rho) + J'_1(\rho)$:

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{r_0}{\mu_n^{(0)}} \right)^2 \int_0^{\mu_n^{(0)}} \left(1 - \frac{\rho^2}{(\mu_n^{(0)})^2} \right) \left(\frac{1}{\rho} J_1(\rho) + J'_1(\rho) \right) \rho d\rho = \\ &= \left(\frac{r_0}{\mu_n^{(0)}} \right)^2 \left[\int_0^{\mu_n^{(0)}} \left(1 - \frac{\rho^2}{(\mu_n^{(0)})^2} \right) J_1(\rho) d\rho + \int_0^{\mu_n^{(0)}} \left(\rho - \frac{\rho^3}{(\mu_n^{(0)})^2} \right) J'_1(\rho) d\rho \right] = \\ &= \left(\frac{r_0}{\mu_n^{(0)}} \right)^2 \left[\int_0^{\mu_n^{(0)}} \left(1 - \frac{\rho^2}{(\mu_n^{(0)})^2} \right) J_1(\rho) d\rho + \left(\rho - \frac{\rho^3}{(\mu_n^{(0)})^2} \right) J_1(\rho) \Big|_0^{\mu_n^{(0)}} - \int_0^{\mu_n^{(0)}} \left(1 - \frac{3\rho^2}{(\mu_n^{(0)})^2} \right) J_1(\rho) d\rho \right] = \\ &= \left(\frac{r_0}{\mu_n^{(0)}} \right)^2 \left[\int_0^{\mu_n^{(0)}} \left(1 - \frac{\rho^2}{(\mu_n^{(0)})^2} \right) J_1(\rho) d\rho - \int_0^{\mu_n^{(0)}} \left(1 - \frac{3\rho^2}{(\mu_n^{(0)})^2} \right) J_1(\rho) d\rho \right] = \\ &= \frac{r_0^2}{(\mu_n^{(0)})^2} \int_0^{\mu_n^{(0)}} \frac{2\rho^2}{(\mu_n^{(0)})^2} J_1(\rho) d\rho = \frac{2r_0^2}{(\mu_n^{(0)})^4} \int_0^{\mu_n^{(0)}} \rho^2 J_1(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (65)$$

Вычислим отдельно интеграл. Ещё раз по частям, $J_1 = -J'_0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\mu_n^{(0)}} \rho^2 J_1(\rho) d\rho &= - \int_0^{\mu_n^{(0)}} \rho^2 J'_0(\rho) d\rho = - \rho^2 J_0(\rho) \Big|_0^{\mu_n^{(0)}} + \int_0^{\mu_n^{(0)}} 2\rho J_0(\rho) d\rho = 2 \int_0^{\mu_n^{(0)}} \rho \left(\frac{1}{\rho} J_1(\rho) + J'_1(\rho) \right) d\rho = \\ &= 2 \int_0^{\mu_n^{(0)}} J_1(\rho) d\rho + 2 \int_0^{\mu_n^{(0)}} \rho J'_1(\rho) d\rho = \end{aligned} \quad (66)$$

И ещё раз:

$$= 2 \int_0^{\mu_n^{(0)}} J_1(\rho) d\rho + 2 \rho J_1(\rho) \Big|_0^{\mu_n^{(0)}} - 2 \int_0^{\mu_n^{(0)}} J_1(\rho) d\rho = 2\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)}).$$

Итак,

$$\int_0^{\mu_n^{(0)}} \rho^2 J_1(\rho) d\rho = 2\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)}), \quad (67)$$

$$\int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) J_0\left(\mu_n^{(0)} \frac{r}{r_0}\right) r dr = \frac{2r_0^2}{(\mu_n^{(0)})^4} \int_0^{\mu_n^{(0)}} \rho^2 J_1(\rho) d\rho = \frac{4r_0^2}{(\mu_n^{(0)})^3} J_1(\mu_n^{(0)}), \quad (68)$$

и (63) записывается в виде

$$C_{0n}^6 \frac{r_0^2}{2} \left[J_1(\mu_n^{(0)}) \right]^2 = A \frac{4r_0^2}{(\mu_n^{(0)})^3} J_1(\mu_n^{(0)}), \quad (69)$$

откуда

$$C_{0n}^6 = \frac{8A}{(\mu_n^{(0)})^3 \left[J_1(\mu_n^{(0)}) \right]^2} J_1(\mu_n^{(0)}) = \frac{8A}{(\mu_n^{(0)})^3 J_1(\mu_n^{(0)})}, \quad (70)$$

что подставляется в (60), и находится окончательный ответ:

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)} a}{r_0} t\right) J_n\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{r_0}\right) C_{0k}^6 = 8A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\mu_k^{(0)} a}{r_0} t\right)}{(\mu_k^{(0)})^3 J_1(\mu_k^{(0)})} J_n\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{r_0}\right). \quad (71)$$