# 1 Условия задачи

$$U(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad t \geqslant 0$$

Уравнение колебаний:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} \tag{1}$$

Граничные условия:

$$U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0 \tag{2}$$

Начальные условия:

$$U|_{t=0} = F(x), \tag{3}$$

$$U_t|_{t=0} = F(x). \tag{4}$$

# 2 Вспомогательная задача

$$U_{tt} = a^2 U_{xx},$$

$$U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0$$

(без нач. условий).

$U = 0$ - тривиальное решение этой задачи. Дальше будем искать нетривиальные в виде

$$U(x,t) = X(x) \cdot T(t). \tag{5}$$

Подставляем:

$$XT'' = a^2 X'' T \left| \frac{1}{a^2 XT} \right.$$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \mu \tag{6}$$

$\mu_x = 0$, $\mu_t = 0$, значит $\mu = const$.

## 2.1 Пространственная часть

$$\frac{X''}{X} = \mu = const.$$

$$X'' = \mu X$$

ОДЕ линейное, однородное с постоянными коэффициентами. Хар. уравнение:

$$\lambda^2 = \mu$$

Рассмотрим случаи:

### 2.1.1 $\mu = \alpha^2 > 0$

$\lambda = \pm\alpha$,

$$X = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$$

Дальше учтём гр. условия начиная с левого:

$$U|_{x=0} = 0 \Rightarrow X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

(аналогично для правого гр. условия $X(l) = 0$).

$X(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1 \Rightarrow X(x) = C_1 e^{\alpha x} - C_1 e^{-\alpha x} = 2C_1 \mathrm{sh}\,(\alpha x)$

$$X(l) = 2C_1 \mathrm{sh}\,(\alpha l) = 0 \Rightarrow \mathrm{sh}\,(\alpha l) = 0 \Rightarrow \alpha l = 0$$

Нетривиальных решений нет

### 2.1.2 $\mu = 0$

$X'' = 0$, $X = C_1 x + C_2$,

$$X(0) = C_2 = 0 \Rightarrow X = C_1 x$$

$$X(l) = C_1 l = 0$$

решения только тривиальные.

### 2.1.3 $\mu = -\alpha^2 < 0$

$\lambda = \pm i\alpha$,

$$X = C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x)$$

$$X(0) = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X = C_1 \sin(\alpha x)\,.$$

$$X(l) = C_1 \sin(\alpha l) = 0 \Rightarrow \sin(\alpha l) = 0 \Rightarrow \alpha l = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi n}{l}, \quad \mu = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$X = C_1 \sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

## 2.2 Временная часть

$$\frac{T''}{a^2 T} = \mu$$

$$T'' = \mu a^2 T = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T$$

$$T = C_3 \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + C_4 \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)$$

### 2.3 Решения вспомогательной задачи

Нетривиальные решения в виде (5)

$$U_n = X_n T_n = \sin\frac{\pi n x}{l}\left[C_n^1 \cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right) + C_n^2 \sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)\right]$$

В силу линейности

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{l}\left[C_n^1 \cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right) + C_n^2 \sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)\right] \tag{7}$$

тоже решение.

## 3 Начальные условия

Вернёмся к исходной задаче с начальными условиями.

$$U|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^1 \sin\frac{\pi n x}{l} = F(x)$$

Доопределим на $-l \leqslant x \leqslant 0$ $F(x) = -F(-x)$. Тогда на $-l \leqslant x \leqslant l$ $F(-x) = -F(x)$, т.е. функция $F(x)$ - нечётная и раскладывается в ряд по синусам. Тогда

$$C_n^1 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} F(z)\sin\frac{\pi n z}{l}dz = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} F(z)\sin\frac{\pi n z}{l}dz. \tag{8}$$

Теперь учтём (4):

$$U_t|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{l}\left[C_n^1 \cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right) + C_n^2 \sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)\right]\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{l}\left[-\frac{\pi n a}{l} C_n^1 \sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right) + \frac{\pi n a}{l} C_n^2 \cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)\right]\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} C_n^2 \sin\frac{\pi n x}{l} = F(x)$$

$$\frac{\pi n a}{l} C_n^2 = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} F(z)\sin\frac{\pi n z}{l}dz$$

$$C_n^2 = \frac{2}{\pi n a}\int\limits_{0}^{l} F(z)\sin\frac{\pi n z}{l}dz \tag{9}$$