$U(x,y)$ – искомая функция

$$aU_{xx}+2bU_{xy}+cU_{yy}+\Phi\left(U_x,U_y,U,x,y\right)=0 \tag{1}$$

1 Замена переменных

$$\begin{cases} s=s\left(x,y\right), \\ t=t\left(x,y\right). \end{cases} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=s_x\frac{\partial}{\partial s}+t_x\frac{\partial}{\partial t} \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=s_y\frac{\partial}{\partial s}+t_y\frac{\partial}{\partial t} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} U_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}U_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(s_xU_s+t_xU_t\right)=s_{xx}U_s+s_x\frac{\partial}{\partial x}U_s+t_{xx}U_t+t_x\frac{\partial}{\partial x}U_t= \\ =s_{xx}U_s+s_x\left(s_xU_{ss}+t_xU_{st}\right)+t_{xx}U_t+t_x\left(s_xU_{ts}+t_xU_{tt}\right)= \\ =s_x^2U_{ss}+2s_xt_xU_{st}+t_x^2U_{tt}+s_{xx}U_s+t_{xx}U_t. \end{aligned} \tag{5}$$

Аналогично

$$U_{yy}=s_y^2U_{ss}+2s_yt_yU_{st}+t_y^2U_{tt}+s_{yy}U_s+t_{yy}U_t. \tag{6}$$

Смешанная производная:

$$\begin{aligned} U_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}U_x=\frac{\partial}{\partial y}\left(s_xU_s+t_xU_t\right)=s_{xy}U_s+s_x\frac{\partial}{\partial y}U_s+t_{xy}U_t+t_x\frac{\partial}{\partial y}U_t= \\ =s_{xy}U_s+s_x\left(s_yU_{ss}+t_yU_{st}\right)+t_{xy}U_t+t_x\left(s_yU_{ts}+t_yU_{tt}\right)= \\ =s_xs_yU_{ss}+\left(s_xt_y+s_yt_x\right)U_{st}+t_xt_yU_{tt}+s_{xy}U_s+t_{xy}U_t. \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнение превратится в

$$\bar{a}U_{ss}+2\bar{b}U_{st}+\bar{c}U_{tt}+\bar{\Phi}\left(U_s,U_t,U,x,y\right)=0, \tag{8}$$

где

$$\bar{a}=as_x^2+2bs_xs_y+cs_y^2 \tag{9}$$

$$\bar{b}=as_xt_x+b\left(s_xt_y+s_yt_x\right)+cs_yt_y \tag{10}$$

$$\bar{c}=at_x^2+2bt_xt_y+ct_y^2 \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}=\Phi+a\left(s_{yy}U_s+t_{yy}U_t\right)+2b\left(s_{xy}U_s+t_{xy}U_t\right)+c\left(s_{yy}U_s+t_{yy}U_t\right)= \\ =\Phi+\left(as_{yy}+2bs_{xy}+cs_{yy}\right)U_s+\left(at_{yy}+2bt_{xy}+ct_{yy}\right)U_t \end{aligned} \tag{12}$$

2 Дискриминант положительный

Зачем всё это:

$$\bar{a} = 0 \tag{13}$$

$$as_x^2 + 2bs_xs_y + cs_y^2 = 0 \left| \frac{1}{s_y^2} \right. \tag{14}$$

$$a\left(\frac{s_x}{s_y}\right)^2 + 2b\frac{s_x}{s_y} + c = 0 \tag{15}$$

$$\frac{s_x}{s_y} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{16}$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \qquad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{17}$$

$$\frac{s_x}{s_y} = \lambda_1 \quad \Longrightarrow \quad s_x - \lambda_1 s_y = 0 \tag{18}$$

линейное уравнение в частных производных 1-го порядка

$$dx = \frac{dy}{-\lambda_1} \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x, y) = C \tag{19}$$

$$s = \varphi(x, y) \tag{20}$$

Но если $b^2 - ac > 0$ есть ещё λ_2, а (9) аналогично (11).

$$dx = \frac{dy}{-\lambda_2} \quad \Longrightarrow \quad \psi(x, y) = C \tag{21}$$

$$t = \psi(x, y) \quad \Longrightarrow \quad \bar{c} = 0 \tag{22}$$

$$U_{st} + \frac{1}{2\bar{b}}\bar{\Phi} = 0, \tag{23}$$

Такие уравнения называются уравнениями гиперболического типа.

Осталось два варианта: $b^2 - ac = 0$ и $b^2 - ac < 0$.

3 Дискриминант отрицательный

Пусть $b^2 - ac < 0$.

Тогда $\lambda = \alpha \pm i\beta$, что $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ (для $\lambda = \alpha - i\beta$ получается аналогично):

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = a(\alpha + i\beta)^2 + 2b(\alpha + i\beta) + c = a\left(\alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2\right) + 2b(\alpha + i\beta) + c = 0. \tag{24}$$

Если разложить

$$\begin{cases} a\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + 2b\alpha + c = 0, \\ a\alpha\beta + b\beta = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Положим теперь, что мы для найденного λ решили уравнение

$$\varphi_x - \lambda\varphi_y = 0, \tag{26}$$

нашли комплексное φ,

$$s = \operatorname{Re}\varphi \qquad t = \operatorname{Im}\varphi \tag{27}$$

$$\varphi = s + it \tag{28}$$

Уравнение (26) приобретает тогда такой вид:

$$s_x + it_x - (\alpha + i\beta)(s_y + it_y) = 0, \tag{29}$$

или

$$s_x + it_x - \alpha s_y + \beta t_y - i\beta s_y - i\alpha t_y = 0. \tag{30}$$

Так как комплексное число равно нулю только тогда, когда нулевыми являются обе его части, мы можем выразить s_x и t_x:

$$\begin{cases} s_x = \alpha s_y - \beta t_y, \\ t_x = \beta s_y + \alpha t_y. \end{cases} \tag{31}$$

Выполним эту подстановку в $\bar{b}$ из (10):

$$\begin{gathered} \bar{b} = a(\alpha s_y - \beta t_y)(\beta s_y + \alpha t_y) + b\left[(\alpha s_y - \beta t_y) t_y + s_y(\beta s_y + \alpha t_y)\right] + c s_y t_y = \\ = s_y^2 (a\alpha\beta + b\beta) + t_y^2(-a\alpha\beta - b\beta) + s_y t_y\left[a\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + 2b\alpha + c\right] = \\ \left(s_y^2 - t_y^2\right)(a\alpha\beta + b\beta) + s_y t_y\left[a\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + 2b\alpha + c\right]. \end{gathered}$$

Оба слагаемых равны нулю согласно (25), значит, $\bar{b} = 0$:

$$\bar{a} U_{ss} + \bar{c} U_{tt} + \bar{\Phi}(U_s, U_t, U, x, y) = 0 \tag{32}$$

(уравнение эллиптического типа)

4 Дискриминант нулевой

Наконец, $b^2 - ac = 0$

В этом случае s находится из уравнения $s_x - \lambda s_y = 0$, что позволяет заменить $s_x = \lambda s_y$:

$$\bar{b} = a\lambda s_y t_x + b(\lambda s_y t_y + s_y t_x) + c s_y t_y = s_y\left[t_x(a\lambda + b) + t_y(b\lambda + c)\right]. \tag{33}$$

Т.к. $b^2 - ac = 0$,

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = -\frac{b}{a}.$$

Подставив это значение в (33), получим, что

$$\bar{b} = s_y\left[t_x\left(-\frac{ab}{a} + b\right) + t_y\left(-\frac{b^2}{a} + c\right)\right] = s_y\left[t_x(-b + b) - \frac{t_y}{a}\left(b^2 - ac\right)\right] = s_y\left[t_x \cdot 0 - t_y \cdot 0\right] = 0.$$

В итоге

$$U_{tt} + \frac{1}{\bar{c}}\bar{\Phi}(U_s, U_t, U, x, y) = 0 \tag{34}$$

(уравнение параболического типа)