1 Определители

1.1 Раскрытие по строке

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{ki}$$

(12.1)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= a\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + b\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + c\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} + d\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 8a - (-15)\,b + 12c - 19d = 8a + 15b + 12c - 19d$$

1.2 Преобразования (13.1 г)

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot 1 \\ \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Вычтем первый столбец из остальных:

$$= 3\begin{vmatrix} 4 & 0 & -5 & -4 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 0 & -5 & -4 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 0 & -5 & -4 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -3\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

Вычтем нижнюю строку из первой и добавим ко второй:

$$= -3\cdot 4\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\cdot 4\cdot 4\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\cdot 4\cdot 4\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -48\,(16-9) = -48\cdot 7 = -336$$

2 Обратные матрицы

18.8 а)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ж)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Правило Крамера (8.6 г):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = 4, \quad \Delta_1 = 9, \quad \Delta_2 = -3, \quad \Delta_3 = -3$$

$$x_1 = \frac{9}{4}, \quad x_2 = -\frac{3}{4}, \quad x_3 = -\frac{3}{4}$$