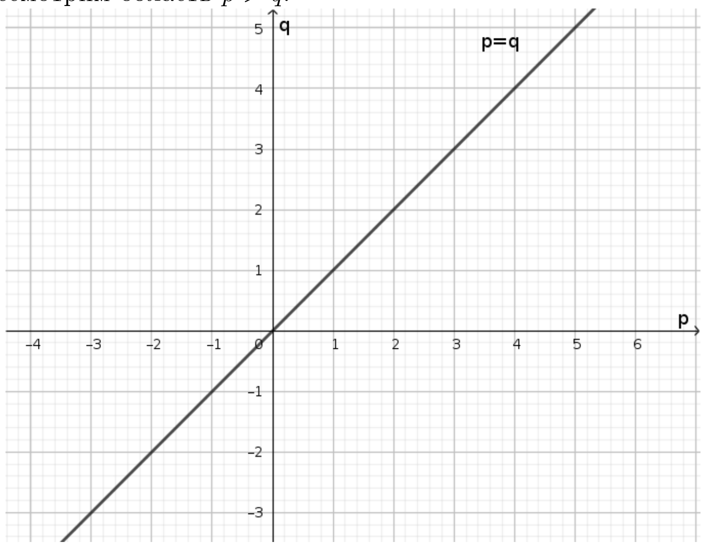
$$I\left(p,q\right)=\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^{p}+x^{q}}dx \tag{1}$$

Рассмотрим область $p>q$:



$$f\left(x\right)=\cos x \tag{2}$$

$$\varphi\left(x\right)=\frac{x}{x^{p}+x^{q}}=\frac{1}{x^{p-1}+x^{q-1}} \tag{3}$$

$$f\left(x\right)\varphi\left(x\right)=\frac{x\cos x}{x^{p}+x^{q}} \tag{4}$$

1) Ограниченность первообразной

$$\left|\int\limits_{\pi}^{b}\cos x dx\right|=\left|\sin b-\sin\pi\right|=\left|\sin b\right|\leqslant 1<2 \tag{5}$$

2.1) Стремление к нулю

$$\lim_{x\to\infty}\varphi\left(x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^{p}+x^{q}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1+x^{q-p}}=\lim_{x\to\infty}x^{1-p}=0 \tag{6}$$

$$1-p<0 \tag{7}$$

$$p>1 \tag{8}$$

2.2) Монотонность

$$\varphi'\left(x\right)=-\frac{\left(p-1\right)x^{p-2}+\left(q-1\right)x^{q-2}}{\left(x^{p-1}+x^{q-1}\right)^{2}}<0 \tag{9}$$

$$\left(p-1\right)x^{p-2}+\left(q-1\right)x^{q-2}>0 \tag{10}$$

$$\left(p-1\right)+\left(q-1\right)x^{q-p}>0 \tag{11}$$

Так как $p>q$

$$q-p<0 \tag{12}$$

$$\lim_{x\to\infty}x^{q-p}=0 \tag{13}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(p-1\right)+\left(q-1\right)x^{q-p}\right]=\left(p-1\right) \tag{14}$$

$\forall\varepsilon>0\ \exists X\colon\forall x>X\implies$

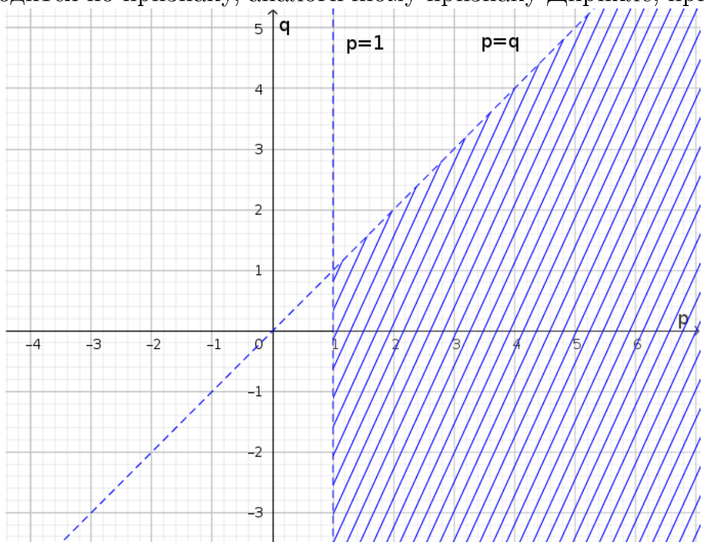
$$\left|\left[\left(p-1\right)+\left(q-1\right)x^{q-p}\right]-\left(p-1\right)\right|<\varepsilon \tag{15}$$

$$(p-1)-\varepsilon < \left[(p-1)+(q-1)\,x^{q-p}\right] < \varepsilon + (p-1) \tag{16}$$

Для $\varepsilon = \frac{p-1}{2} > 0$ $\exists X_1$: $\forall x > X_1 \implies$

$$0 < \frac{p-1}{2} < \left[(p-1)+(q-1)\,x^{q-p}\right]. \tag{17}$$

Сходится по признаку, аналогичному признаку Дирихле, при $p > q$ и $p > 1$.



Докажем расходимость при $p \leqslant 1$

$$\frac{x\cos x}{x^p + x^q} = \frac{x^{1-p}\cos x}{1 + x^{q-p}} \tag{18}$$

1) Так как $p > q$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^{q-p}} = 1 \tag{19}$$

Для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists B$: $\forall x > B \implies$

$$\left|\frac{1}{1+x^{q-p}} - 1\right| < \frac{1}{2} \tag{20}$$

$$\frac{1}{1+x^{q-p}} > \frac{1}{2} \tag{21}$$

2) При $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$

$$\cos x > \frac{1}{2} \tag{22}$$

3) $p \leqslant 1$ $1 - p \geqslant 0$

$$\lim_{x\to\infty} x^{1-p} = \infty \tag{23}$$

$\exists C$: $\forall x > C \implies$

$$x^{1-p} > \frac{1}{2} \tag{24}$$

Выберем $\forall X$. $A = \max(B, C, X)$. $x > A \implies x > C$, $x > B$. Выберем целое k, чтобы

$$k > \frac{A + \frac{\pi}{3}}{2\pi} \tag{25}$$

$$A < -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \tag{26}$$

При $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$ выполняются (21), (22) и (24):

$$\frac{x^{1-p}\cos x}{1+x^{q-p}} > \frac{1}{8} \tag{27}$$

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}^{\frac{\pi}{3}+2\pi k} \frac{x^{1-p}\cos x}{1+x^{q-p}}dx > \int\limits_{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}^{\frac{\pi}{3}+2\pi k} \frac{1}{8}dx = \frac{1}{8}\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12} \tag{28}$$

$$\left|\int\limits_{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}^{\frac{\pi}{3}+2\pi k} \frac{x^{1-p}\cos x}{1+x^{q-p}}dx\right| > \frac{\pi}{12} \tag{29}$$

Итак: $\exists\varepsilon = \frac{\pi}{12}$, что для $\forall X$ $\exists b = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ и $b_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$:

$$\left|\int\limits_{b}^{b_1} \frac{x^{1-p}\cos x}{1+x^{q-p}}dx\right| > \varepsilon. \tag{30}$$

Интеграл расходится по кр. Коши.

$p < q$:

$$I(p,q) = I(q,p) \tag{31}$$

сх. при $q > 1$, расх. при $q \leqslant 1$