

1 Условия задачи

$$U(x, t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

Уравнение колебаний:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} \quad (2)$$

Граничные условия:

$$U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0 \quad (3)$$

Начальные условия:

$$U|_{t=0} = F(x), \quad (4)$$

$$U_t|_{t=0} = G(x). \quad (5)$$

2 Вспомогательная задача

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad (6)$$

$$U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0 \quad (7)$$

(без нач. условий).

$U = 0$ - тривиальное решение этой задачи. Далее будем искать нетривиальные в виде

$$U(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (8)$$

Подставляем:

$$XT'' = a^2 X''T \left| \frac{1}{a^2 XT} \right. \quad (9)$$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \mu \quad (10)$$

$\mu_x = 0, \mu_t = 0$, значит $\mu = const$.

2.1 Пространственная часть

$$\frac{X''}{X} = \mu = const. \quad (11)$$

$$X'' = \mu X \quad (12)$$

ОДЭ линейное, однородное с постоянными коэффициентами. Хар. уравнение:

$$\lambda^2 = \mu \quad (13)$$

Рассмотрим случай:

2.1.1 $\mu = \alpha^2 > 0$

$$\lambda = \pm\alpha,$$

$$X = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} \quad (14)$$

Дальше учтём гр. условия начиная с левого:

$$U|_{x=0} = 0 \Rightarrow X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \quad (15)$$

(аналогично для правого гр. условия $X(l) = 0$).

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1 \Rightarrow X(x) = C_1 e^{\alpha x} - C_1 e^{-\alpha x} = 2C_1 \operatorname{sh}(\alpha x) \quad (16)$$

$$X(l) = 2C_1 \operatorname{sh}(\alpha l) = 0 \Rightarrow \operatorname{sh}(\alpha l) = 0 \Rightarrow \alpha l = 0 \quad (17)$$

Нетривиальных решений нет

2.1.2 $\mu = 0$

$$X'' = 0, X = C_1 x + C_2,$$

$$X(0) = C_2 = 0 \Rightarrow X = C_1 x \quad (18)$$

$$X(l) = C_1 l = 0 \quad (19)$$

решения только тривиальные.

2.1.3 $\mu = -\alpha^2 < 0$

$$\lambda = \pm i\alpha,$$

$$X = C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x) \quad (20)$$

$$X(0) = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = C_2 = 0 \Rightarrow X = C_1 \sin(\alpha x). \quad (21)$$

$$X(l) = C_1 \sin(\alpha l) = 0 \Rightarrow \sin(\alpha l) = 0 \Rightarrow \alpha l = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad (22)$$

$$\alpha = \frac{\pi n}{l}, \quad \mu = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad (23)$$

$$X = C_1 \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (24)$$

$$n \in \mathbb{N} \quad (25)$$

2.2 **Временная часть**

$$\frac{T''}{a^2 T} = \mu \quad (26)$$

$$T'' = \mu a^2 T = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T \quad (27)$$

$$T = C_3 \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + C_4 \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \quad (28)$$

2.3 Решения вспомогательной задачи

Нетривиальные решения в виде (8)

$$U_n = X_n T_n = \sin \frac{\pi n x}{l} \left[C_n^1 \cos \left(\frac{\pi n a}{l} t \right) + C_n^2 \sin \left(\frac{\pi n a}{l} t \right) \right] \quad (29)$$

В силу линейности

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l} \left[C_n^1 \cos \left(\frac{\pi n a}{l} t \right) + C_n^2 \sin \left(\frac{\pi n a}{l} t \right) \right] \quad (30)$$

тоже решение.

3 Начальные условия

Вернёмся к исходной задаче с начальными условиями.

$$U|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^1 \sin \frac{\pi n x}{l} = F(x) \quad (31)$$

Доопределим на $-l \leq x \leq 0$ $F(x) = -F(-x)$. Тогда на $-l \leq x \leq l$ $F(-x) = -F(x)$, т.е. функция $F(x)$ - нечётная и раскладывается в ряд по синусам. Тогда

$$C_n^1 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(z) \sin \frac{\pi n z}{l} dz = \frac{2}{l} \int_0^l F(z) \sin \frac{\pi n z}{l} dz. \quad (32)$$

Теперь учтём (5):

$$U_t|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l} \left[C_n^1 \cos \left(\frac{\pi n a}{l} t \right) + C_n^2 \sin \left(\frac{\pi n a}{l} t \right) \right] \Big|_{t=0} = \quad (33)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l} \left[-\frac{\pi n a}{l} C_n^1 \sin \left(\frac{\pi n a}{l} t \right) + \frac{\pi n a}{l} C_n^2 \cos \left(\frac{\pi n a}{l} t \right) \right] \Big|_{t=0} = \quad (34)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} C_n^2 \sin \frac{\pi n x}{l} = F(x) \quad (35)$$

$$\frac{\pi n a}{l} C_n^2 = \frac{2}{l} \int_0^l F(z) \sin \frac{\pi n z}{l} dz \quad (36)$$

$$C_n^2 = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l F(z) \sin \frac{\pi n z}{l} dz \quad (37)$$