1 Условия задачи

Решить уравнение Лапласа

$$\Delta U = 0 \tag{1}$$

с граничным условием

$$U|_{r=a} = A\sin\varphi \tag{2}$$

а) внутри
б) снаружи окружности $r = a$.

2 Перевод лапласиана в полярные координаты

$$U = U(r,\varphi) \quad U(r,\varphi) = U(r,\varphi + 2\pi) \tag{3}$$

$$U_{xx} = U_{rr}(r_x)^2 + 2U_{r\varphi}r_x\varphi_x + U_{\varphi\varphi}(\varphi_x)^2 + U_r r_{xx} + U_\varphi\varphi_{xx} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{5}$$

Находим производные:

$$\begin{cases} 1 = r_x\cos\varphi - r\sin\varphi\varphi_x| & \cdot\cos\varphi \\ 0 = r_x\sin\varphi + r\cos\varphi\varphi_x| & \cdot\sin\varphi \end{cases} \tag{6}$$

$$r_x = \cos\varphi \tag{7}$$

$$0 = \cos\varphi\sin\varphi + r\cos\varphi\varphi_x \tag{8}$$

$$\varphi_x = -\frac{\sin\varphi}{r} \tag{9}$$

$$r_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}r_x = \frac{\partial}{\partial x}\cos\varphi = -\sin\varphi\varphi_x = -\sin\varphi\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right) = \frac{\sin^2\varphi}{r} \tag{10}$$

$$\varphi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\varphi_x = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\sin\varphi}{r} = -\frac{\cos\varphi}{r}\varphi_x + \frac{\sin\varphi}{r^2}r_x = -\frac{\cos\varphi}{r}\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right) + \frac{\sin\varphi}{r^2}\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \tag{11}$$

Подставляем в

$$U_{xx} = U_{rr}(\cos\varphi)^2 + 2U_{r\varphi}\cos\varphi\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right) + U_{\varphi\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right)^2 + U_r\frac{\sin^2\varphi}{r} + U_\varphi\left(\frac{\sin 2\varphi}{r^2}\right) =$$

$$= U_{rr}\cos^2\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{r}U_{r\varphi} + U_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r}U_r + \frac{\sin 2\varphi}{r^2}U_\varphi. \tag{12}$$

Аналогично

$$U_{yy} = U_{rr}\sin^2\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{r}U_{r\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}U_{\varphi\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r}U_r - \frac{\sin 2\varphi}{r^2}U_\varphi \tag{13}$$

В сумме

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = U_{rr} + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}U_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_r) + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi} \tag{14}$$

3 Решение уравнения Лапласа в полярных координатах

3.1 Разделение переменных

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rU_r\right) + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi} = 0 \tag{15}$$

$$U\left(r,\varphi\right) = R\left(r\right)\Phi\left(\varphi\right) \tag{16}$$

Из (3)

$$\Phi\left(\varphi\right) = \Phi\left(\varphi + 2\pi\right) \tag{17}$$

Подставляем в (15)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rR'\right)\Phi + R\frac{1}{r^2}\Phi'' = 0\Big|\,\frac{r^2}{R\Phi} \tag{18}$$

$$\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(rR'\right) = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu, \quad \mu = const \tag{19}$$

3.2 Угловая часть

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu \tag{20}$$

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0 \tag{21}$$

ХУ:

$$\lambda^2 + \mu = 0 \tag{22}$$

Случай $\mu < 0$ $\;: \mu = -\alpha^2 \; \lambda = \pm\alpha$

$$\Phi = C_1 e^{\alpha\varphi} + C_2 e^{-\alpha\varphi} \tag{23}$$

Из (17)

$$C_1 e^{\alpha\varphi} + C_2 e^{-\alpha\varphi} = C_1 e^{\alpha(\varphi+2\pi)} + C_2 e^{-\alpha(\varphi+2\pi)} \tag{24}$$

Дифференцируем по φ и делим на α:

$$C_1 e^{\alpha\varphi} - C_2 e^{-\alpha\varphi} = C_1 e^{\alpha(\varphi+2\pi)} - C_2 e^{-\alpha(\varphi+2\pi)} \tag{25}$$

Складываем

$$C_1 e^{\alpha\varphi} = C_1 e^{\alpha(\varphi+2\pi)} \tag{26}$$

$$C_1\left(e^{2\pi\alpha} - 1\right) = 0 \tag{27}$$

$$2\pi\alpha \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 0. \tag{28}$$

Из (24) и (28)

$$C_2 e^{-\alpha\varphi} = C_2 e^{-\alpha(\varphi+2\pi)} \tag{29}$$

$$C_2\left(1 - e^{-2\pi\alpha}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = 0 \tag{30}$$

$$\Phi = 0 \tag{31}$$

Случай $\mu = 0$:

$$\Phi'' = 0 \tag{32}$$

$$\Phi = C_1\varphi + C_2 \tag{33}$$

$$C_1\varphi + C_2 = C_1(\varphi + 2\pi) + C_2 \tag{34}$$

$$2\pi C_1 = 0 \tag{35}$$

$$\Phi = C_2 \tag{36}$$

Случай $\mu > 0$: $\mu = \alpha^2$

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0, \quad \lambda = \pm i\alpha \tag{37}$$

$$\Phi = C_1\cos(\alpha\varphi) + C_2\sin(\alpha\varphi) \tag{38}$$

Из (17)

$$C_1\cos(\alpha\varphi) + C_2\sin(\alpha\varphi) = C_1\cos(\alpha[\varphi + 2\pi]) + C_2\sin(\alpha[\varphi + 2\pi]), \tag{39}$$

$$-2C_1\sin(\pi\alpha)\sin(\alpha\varphi + \pi\alpha) + 2C_2\sin(\pi\alpha)\cos(\alpha\varphi + \pi\alpha) = 0, \tag{40}$$

$$\sin(\pi\alpha)\left(C_1\sin(\alpha\varphi + \pi\alpha) - C_2\cos(\alpha\varphi + \pi\alpha)\right) = 0. \tag{41}$$

Пусть

$$C_1\sin(\alpha\varphi + \pi\alpha) - C_2\cos(\alpha\varphi + \pi\alpha) = 0. \tag{42}$$

Дифференцируем по φ и делим на α:

$$C_1\cos(\alpha\varphi + \pi\alpha) + C_2\sin(\alpha\varphi + \pi\alpha) = 0. \tag{43}$$

Умножим 42 на $\sin(\alpha\varphi + \pi\alpha)$, 43 на $\cos(\alpha\varphi + \pi\alpha)$ и сложим:

$$+\begin{array}{l} C_1\sin^2(\alpha\varphi + \pi\alpha) - C_2\cos(\alpha\varphi + \pi\alpha)\sin(\alpha\varphi + \pi\alpha) = 0, \\ C_1\cos^2(\alpha\varphi + \pi\alpha) + C_2\sin(\alpha\varphi + \pi\alpha)\cos(\alpha\varphi + \pi\alpha) = 0, \end{array} \tag{44}$$

$$C_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = 0. \tag{45}$$

Итак,

$$\sin(\pi\alpha) = 0 \tag{46}$$

$$\pi\alpha = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \tag{47}$$

$$\alpha = n,\ \mu = n^2 \tag{48}$$

$$\Phi_n = C_1^n\cos(n\varphi) + C_2^n\sin(n\varphi) \tag{49}$$

(при $n = 0$ получаем (36), $n = 0, 1, 2\ldots$)

3.3 Радиальная часть

Возьмём левую часть (19):

$$\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(rR'\right) = n^2, \tag{50}$$

$$r^2R'' + rR' = n^2R. \tag{51}$$

$r = e^\rho$ $\rho = \ln r$

$$R' = \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{d\rho}\frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{r}\frac{dR}{d\rho}, \tag{52}$$

$$R'' = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dR}{d\rho}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{dR}{d\rho} = -\frac{1}{r^2}\frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2R}{d\rho^2} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2R}{d\rho^2} - \frac{dR}{d\rho}\right), \tag{53}$$

$$\left(\frac{d^2R}{d\rho^2} - \frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{dR}{d\rho} = n^2R \tag{54}$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} = n^2R \tag{55}$$

$$R_n = C_3^n e^{n\rho} + C_4^n e^{-n\rho} = C_3^n r^n + C_4^n r^{-n} \tag{56}$$

4 Решение пункта а)

Внутри, при $r < a$, $C_4^n = 0$.

Подставим (49) и (56) в (16)

$$U_n = \left(C_5^n \cos(n\varphi) + C_6^n \sin(n\varphi)\right) r^n. \tag{57}$$

В силу линейности (1),

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(C_5^n \cos(n\varphi) + C_6^n \sin(n\varphi)\right) r^n, \tag{58}$$

где $C_5^n = C_1^n \cdot C_3^n$, $C_6^n = C_2^n \cdot C_3^n$.

Найдём C_5^n и C_6^n из (2):

$$U|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(C_5^n \cos(n\varphi) + C_6^n \sin(n\varphi)\right) a^n = A\sin\varphi. \tag{59}$$

Это условие выполняется при

$$C_5^n = 0; \quad C_6^1 = \frac{A}{a}; \quad C_6^n = 0, \quad n \neq 1. \tag{60}$$

Тогда

$$U = \left(C_5^n \cos(n\varphi) + C_6^n \sin(n\varphi)\right) r^n\big|_{n=1} = \left(C_5^1 \cos(\varphi) + C_6^1 \sin(\varphi)\right) r = \frac{Ar}{a}\sin(\varphi) \tag{61}$$

5 Решение пункта б)

Снаружи, при $r > a$, $C_3^n = 0$,

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_5^n \cos\left(n\varphi\right) + C_6^n \sin\left(n\varphi\right) \right) r^{-n}, \tag{62}$$

где $C_5^n = C_1^n \cdot C_4^n$, $C_6^n = C_2^n \cdot C_4^n$. На границе

$$U|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_5^n \cos\left(n\varphi\right) + C_6^n \sin\left(n\varphi\right) \right) a^{-n} = A \sin\varphi, \tag{63}$$

что имеет место при

$$C_5^n = 0; \quad C_6^1 = Aa; \quad C_6^n = 0, \quad n \neq 1. \tag{64}$$

Тогда

$$U = \frac{Aa}{r} \sin\left(\varphi\right). \tag{65}$$