**3. Формула Грина.** Пусть граница $\Gamma$ плоской ограниченной области $G$ состоит из конечного набора кусочно гладких кривых. Тогда, если функции $P$, $Q$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на $\overline{G}$, то справедлива *формула Грина*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy, \tag{19}$$

где контур $\Gamma$ ориентирован так, что при его обходе область $G$ остается слева.

Из формулы (19) при $Q = x$, $P = -y$ получаем

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma x\,dy - y\,dx, \tag{20}$$

где $S = \iint\limits_G dx\,dy$ — площадь области $G$, ограниченной контуром $\Gamma$ (при обходе контура $\Gamma$ область $G$ остается слева).

**4. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.** Если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны в плоской области $G$, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} P\,dx + Q\,dy \tag{21}$$

не зависит от пути интегрирования $\Gamma_{AB}$ (кривая $\Gamma_{AB}$ лежит в области $G$, $A$ — ее начало, $B$ — конец) тогда и только тогда, когда выражение $P\,dx + Q\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x;y)$, т. е. в области $G$ выполняется условие

$$du = P\,dx + Q\,dy \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q. \tag{22}$$

При этом

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} P\,dx + Q\,dy = u(B) - u(A). \tag{23}$$

Здесь

$$u(x;y) = \int\limits_{\Gamma_{M_0M}} P\,dx + Q\,dy, \tag{24}$$

где $\Gamma_{M_0M}$ — некоторая кривая с началом в фиксированной точке $M_0(x_0;y_0)$ и концом в точке $M(x;y)$, лежащая в области $G$.

Пусть функции $P$, $Q$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в плоской области $G$. Тогда для того чтобы криволинейный интеграл (21) не зависел от пути интегрирования, необходимо, а в случае, когда $G$ — односвязная область, то и достаточно, чтобы в области $G$ выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{25}$$

Пример 3. Вычислить с помощью формулы Грина криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{G} x^2 y\, dx - xy^2\, dy,$$

где Г — окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

▲ Воспользуемся формулой (19), где

$$P = x^2 y, \quad Q = -xy^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -y^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x^2.$$

Тогда

$$I = -\iint\limits_{D} (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

где $D$ — круг радиуса $R$ с центром в точке $(0; 0)$. Переходя к полярным координатам, получаем

$$I = -\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} r^3\, dr = -\frac{\pi R^4}{2}. \ ▲$$

Пример 4. Пользуясь формулой (20), найти площадь $S$, ограниченную астроидой

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

▲ Применяя формулы (20) и (16), получаем

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\, dt = \frac{3a^2}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)\, dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 2t\, dt = \frac{3a^2}{16}\int\limits_{0}^{2\pi} (1 - \cos 4t)\, dt = \frac{3\pi a^2}{8}. \ ▲$$

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой Г, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева (45–55).

**45.** $\int\limits_{\Gamma} (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy$, если:

1) Г — эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; 2) Г — окружность $x^2 + y^2 = ax$.

**46.** $\int\limits_{\Gamma} (2xy - y)\,dx + x^2\,dy$, Г — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

**47.** $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{x\,dy + y\,dx}{x^2 + y^2}$, Г — окружность $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

**48.** $\int\limits_{\Gamma} (x + y)^2\,dx - (x^2 + y^2)\,dy$, Г — граница треугольника с вершинами $(1;1)$, $(3;2)$, $(2;5)$.

**49.** $\int\limits_{\Gamma} (y - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$, Г — граница кругового сектора $0 < r < R$, $0 < \varphi < \alpha \leqslant \pi/2$, где $(r;\varphi)$ — полярные координаты.

**50.** $\int\limits_{\Gamma} e^x[(1 - \cos y)\,dx + (\sin y - y)\,dy]$, Г — граница области $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$.

**51.** $\int\limits_{\Gamma} e^{y^2 - x^2}(\cos 2xy\,dx + \sin 2xy\,dy$, Г — окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

**52.** $\int\limits_{\Gamma} (e^x \sin y - y)\,dx + (e^x \cos y - 1)\,dy$, Г — граница области $x^2 + y^2 < ax$, $y > 0$.

Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл по кривой Γ с началом в точке $A$ и концом в точке $B$ (56–68).

**56.** $\displaystyle\int_\Gamma x\,dy + y\,dx,\ A(-1;3),\ B(2;2).$

**57.** $\displaystyle\int_\Gamma x\,dx + y\,dy,\ A(-1;0),\ B(-3;4).$

**58.** $\displaystyle\int_\Gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy,\ A(2;-1),\ B(1;0).$

**59.** $\displaystyle\int_\Gamma 2xy\,dx + x^2\,dy,\ A(0;0),\ B(-2;-1).$

**60.** $\displaystyle\int_\Gamma (x^4+4xy^3)\,dx + (6x^2y^2-5y^4)\,dy,\ A(-2;-1),\ B(0;3).$

**61.** $\displaystyle\int_\Gamma (x^2+2xy-y^2)\,dx + (x^2-2xy-y^2)\,dy,\quad A(3;0),\quad A(0;-3).$

**62.** $\displaystyle\int_\Gamma (3x^2-2xy+y^2)\,dx + (2xy-x^2-3y^2)\,dy,$

$A(-1;2),\ B(1;-2).$

**63.** $\displaystyle\int_\Gamma f(x+y)(dx+dy)$, $f(t)$ — непрерывная функция, $A(0;0)$, $B(x_0;y_0)$.