

$U(x, y)$  – искомая функция

$$aU_{xx} + 2bU_{xy} + cU_{yy} + \Phi(U_x, U_y, U, x, y) = 0 \quad (1)$$

## 1 Замена переменных

$$\begin{cases} s = s(x, y), \\ t = t(x, y). \end{cases} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = s_x \frac{\partial}{\partial s} + t_x \frac{\partial}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = s_y \frac{\partial}{\partial s} + t_y \frac{\partial}{\partial t} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} U_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} U_x = \frac{\partial}{\partial x} (s_x U_s + t_x U_t) = s_{xx} U_s + s_x \frac{\partial}{\partial x} U_s + t_{xx} U_t + t_x \frac{\partial}{\partial x} U_t = \\ &= s_{xx} U_s + s_x (s_x U_{ss} + t_x U_{st}) + t_{xx} U_t + t_x (s_x U_{ts} + t_x U_{tt}) = \\ &= s_x^2 U_{ss} + 2s_x t_x U_{st} + t_x^2 U_{tt} + s_{xx} U_s + t_{xx} U_t. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично

$$U_{yy} = s_y^2 U_{ss} + 2s_y t_y U_{st} + t_y^2 U_{tt} + s_{yy} U_s + t_{yy} U_t. \quad (6)$$

Смешанная производная:

$$\begin{aligned} U_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} U_x = \frac{\partial}{\partial y} (s_x U_s + t_x U_t) = s_{xy} U_s + s_x \frac{\partial}{\partial y} U_s + t_{xy} U_t + t_x \frac{\partial}{\partial y} U_t = \\ &= s_{xy} U_s + s_x (s_y U_{ss} + t_y U_{st}) + t_{xy} U_t + t_x (s_y U_{ts} + t_y U_{tt}) = \\ &= s_x s_y U_{ss} + (s_x t_y + s_y t_x) U_{st} + t_x t_y U_{tt} + s_{xy} U_s + t_{xy} U_t. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение превратится в

$$\bar{a}U_{ss} + 2\bar{b}U_{st} + \bar{c}U_{tt} + \bar{\Phi}(U_s, U_t, U, x, y) = 0, \quad (8)$$

где

$$\bar{a} = as_x^2 + 2bs_x s_y + cs_y^2 \quad (9)$$

$$\bar{b} = as_x t_x + b(s_x t_y + s_y t_x) + cs_y t_y \quad (10)$$

$$\bar{c} = at_x^2 + 2bt_x t_y + ct_y^2 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \Phi + a(s_{xx} U_s + t_{xx} U_t) + 2b(s_{xy} U_s + t_{xy} U_t) + c(s_{yy} U_s + t_{yy} U_t) = \\ &= \Phi + (as_{xx} + 2bs_{xy} + cs_{yy}) U_s + (at_{xx} + 2bt_{xy} + ct_{yy}) U_t \end{aligned} \quad (12)$$

## 2 Дискриминант положительный

Зачем всё это:

$$\bar{a} = 0 \quad (13)$$

$$as_x^2 + 2bs_xs_y + cs_y^2 = 0 \left| \frac{1}{s_y^2} \right. \quad (14)$$

$$a \left( \frac{s_x}{s_y} \right)^2 + 2b \frac{s_x}{s_y} + c = 0 \quad (15)$$

$$\frac{s_x}{s_y} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (16)$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (17)$$

$$\frac{s_x}{s_y} = \lambda_1 \implies s_x - \lambda_1 s_y = 0 \quad (18)$$

линейное уравнение в частных производных 1-го порядка

$$dx = \frac{dy}{-\lambda_1} \implies \varphi(x, y) = C \quad (19)$$

$$s = \varphi(x, y) \quad (20)$$

Но если  $b^2 - ac > 0$  есть ещё  $\lambda_2$ , а (9) аналогично (11).

$$dx = \frac{dy}{-\lambda_2} \implies \psi(x, y) = C \quad (21)$$

$$t = \psi(x, y) \implies \bar{c} = 0 \quad (22)$$

$$U_{st} + \frac{1}{2b} \bar{\Phi} = 0, \quad (23)$$

Такие уравнения называются уравнениями гиперболического типа.

Осталось два варианта:  $b^2 - ac = 0$  и  $b^2 - ac < 0$ .

## 3 Дискриминант отрицательный

Пусть  $b^2 - ac < 0$ .

Тогда  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ , что  $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ . Пусть  $\lambda = \alpha + i\beta$  (для  $\lambda = \alpha - i\beta$  получается аналогично):

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = a(\alpha + i\beta)^2 + 2b(\alpha + i\beta) + c = a(\alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2) + 2b(\alpha + i\beta) + c = 0. \quad (24)$$

Если разложить

$$\begin{cases} a(\alpha^2 - \beta^2) + 2b\alpha + c = 0, \\ a\alpha\beta + b\beta = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Положим теперь, что мы для найденного  $\lambda$  решили уравнение

$$\varphi_x - \lambda\varphi_y = 0, \quad (26)$$

нашли комплексное  $\varphi$ ,

$$s = \operatorname{Re} \varphi \quad t = \operatorname{Im} \varphi \quad (27)$$

$$\varphi = s + it \quad (28)$$

Уравнение (26) приобретает тогда такой вид:

$$s_x + it_x - (\alpha + i\beta)(s_y + it_y) = 0, \quad (29)$$

или

$$s_x + it_x - \alpha s_y + \beta t_y - i\beta s_y - i\alpha t_y = 0. \quad (30)$$

Так как комплексное число равно нулю только тогда, когда нулевыми являются обе его части, мы можем выразить  $s_x$  и  $t_x$ :

$$\begin{cases} s_x = \alpha s_y - \beta t_y, \\ t_x = \beta s_y + \alpha t_y. \end{cases} \quad (31)$$

Выполним эту подстановку в  $\bar{b}$  из (10):

$$\begin{aligned} \bar{b} &= a(\alpha s_y - \beta t_y)(\beta s_y + \alpha t_y) + b[(\alpha s_y - \beta t_y)t_y + s_y(\beta s_y + \alpha t_y)] + cs_y t_y = \\ &= s_y^2(\alpha\alpha\beta + b\beta) + t_y^2(-a\alpha\beta - b\beta) + s_y t_y [a(\alpha^2 - \beta^2) + 2b\alpha + c] = \\ &= (s_y^2 - t_y^2)(\alpha\alpha\beta + b\beta) + s_y t_y [a(\alpha^2 - \beta^2) + 2b\alpha + c]. \end{aligned} \quad (32)$$

Оба слагаемых равны нулю согласно (25), значит,  $\bar{b} = 0$ :

$$\bar{a}U_{ss} + \bar{c}U_{tt} + \bar{\Phi}(U_s, U_t, U, x, y) = 0 \quad (33)$$

(уравнение эллиптического типа)

## 4 Дискриминант нулевой

Наконец,  $b^2 - ac = 0$

В этом случае  $s$  находится из уравнения  $s_x - \lambda s_y = 0$ , что позволяет заменить  $s_x = \lambda s_y$ :

$$\bar{b} = a\lambda s_y t_x + b(\lambda s_y t_y + s_y t_x) + cs_y t_y = s_y [t_x(a\lambda + b) + t_y(b\lambda + c)]. \quad (34)$$

Т.к.  $b^2 - ac = 0$ ,

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = -\frac{b}{a}.$$

Подставив это значение в (34), получим, что

$$\bar{b} = s_y \left[ t_x \left( -\frac{ab}{a} + b \right) + t_y \left( -\frac{b^2}{a} + c \right) \right] = s_y \left[ t_x(-b + b) - \frac{t_y}{a}(b^2 - ac) \right] = s_y [t_x \cdot 0 - t_y \cdot 0] = 0.$$

В итоге

$$U_{tt} + \frac{1}{c}\bar{\Phi}(U_s, U_t, U, x, y) = 0 \quad (35)$$

(уравнение параболического типа)

## 5 Пример: Дайшев, Никитин №7

$$U_{xx} - 2 \sin x U_{xy} - \cos^2 x U_{yy} - \cos x U_y = 0 \quad (36)$$

$$a = 1, \quad b = -\sin x, \quad c = -\cos^2 x, \quad \Phi = -\cos x U_y \quad (37)$$

$$b^2 - ac = \sin^2 x - (-\cos^2 x) = 1 > 0 \quad (38)$$

Гиперболическое.

$$\lambda_1 = \sin x - 1, \quad \lambda_2 = \sin x + 1 \quad (39)$$

$$s_x - \lambda_1 s_y = s_x - (\sin x - 1) s_y = 0 \quad (40)$$

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\sin x - 1} \quad (41)$$

$$-(\sin x - 1) dx = dy \quad (42)$$

$$\cos x + x - y = C_1 \quad (43)$$

$$s = \cos x + x - y \quad (44)$$

$$s_x = -\sin x + 1, \quad s_y = -1 \quad (45)$$

$$t_x - \lambda_2 t_y = t_x - (\sin x + 1) t_y = 0 \quad (46)$$

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\sin x + 1} \quad (47)$$

$$-(\sin x + 1) dx = dy \quad (48)$$

$$\cos x - x - y = C_1 \quad (49)$$

$$t = \cos x - x - y \quad (50)$$

$$t_x = -\sin x - 1, \quad t_y = -1 \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \bar{b} &= a s_x t_x + b (s_x t_y + s_y t_x) + c s_y t_y = s_x t_x - \sin x (s_x t_y + s_y t_x) - \cos^2 x s_y t_y = \\ &= (-\sin x + 1)(-\sin x - 1) - \sin x (-(-\sin x + 1) - (-\sin x - 1)) - \cos^2 x = \end{aligned} \quad (52)$$

$$= (-\sin x)^2 - 1 - 2 \sin^2 x - \cos^2 x = -\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = -2$$

$$\Phi = -\cos x U_y = -\cos x (U_s s_y + U_t t_y) = \cos x (U_s + U_t)$$

$$\bar{\Phi} = \Phi + (a s_{xx} + 2b s_{xy} + c s_{yy}) U_s + (a t_{xx} + 2b t_{xy} + c t_{yy}) U_t = \quad (53)$$

$$= \cos x (U_s + U_t) + s_{xx} U_s + t_{xx} U_t = \cos x (U_s + U_t) - \cos x U_s - \cos x U_t = 0$$

$$-4U_{st} = 0 \quad (54)$$

$$U = \varphi(s) + \psi(t) = \varphi(\cos x + x - y) + \psi(\cos x - x - y) \quad (55)$$