Линейное однородное уравнение:

$$L\left(y\right)=\sum_{k=0}^{n}a_ky^{(k)}=0 \tag{1}$$

$$L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2),\qquad L(\alpha y)=\alpha L(y). \tag{2}$$

Если

$$L\left(y_1\right)=0\quad \text{и}\quad L\left(y_2\right)=0, \tag{3}$$

то

$$L\left(\alpha y_1+\beta y_2\right)=\alpha L\left(y_1\right)+\beta L\left(y_2\right)=0. \tag{4}$$

Общее решение:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n. \tag{5}$$

С постоянными коэффициентами

Ищем решение в виде

$$y=e^{\lambda x} \tag{6}$$

$$L\left(e^{\lambda x}\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(e^{\lambda x}\right)^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^ke^{\lambda x}=0\left|\cdot\frac{1}{e^{\lambda x}}\right. \tag{7}$$

Хар. уравнение:

$$Q\left(\lambda\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^k=0 \tag{8}$$

Корни кратности 1

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+\ldots+C_ne^{\lambda_nx}. \tag{9}$$

Корень $\lambda=\mu$ кратности $m\leqslant n$

$$Q\left(\lambda\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^k=\left(\lambda-\mu\right)^m\sum_{k=0}^{n-m}b_k\lambda^k=\left(\lambda-\mu\right)^mP\left(\lambda\right) \tag{10}$$

Пусть $m>j\in\mathbb{N}$. Найдём

$$\frac{d^j}{d\lambda^j}Q\left(\lambda\right)=\sum_{k=0}^{j}C_j^k\left(P\left(\lambda\right)\right)^{(j-k)}\left(\left(\lambda-\mu\right)^m\right)^{(k)}=\sum_{k=0}^{j}C_j^k\left(P\left(\lambda\right)\right)^{(j-k)}\frac{m!}{(m-k)!}\left(\lambda-\mu\right)^{m-k} \tag{11}$$

$$k\leqslant j<m\quad\Longrightarrow\quad m-k>0 \tag{12}$$

$$\left.\frac{d^j}{d\lambda^j}Q\left(\lambda\right)\right|_{\lambda=\mu}=\sum_{k=0}^{j}\ldots\left.\left(\lambda-\mu\right)^{m-k}\right|_{\lambda=\mu}=0 \tag{13}$$

Пусть теперь $m>p\in\mathbb{N}$. Покажем, что $y=x^pe^{\mu x}$ – решение уравнения (1):

$$L\left(x^pe^{\mu x}\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(x^pe^{\mu x}\right)^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{j=0}^{k}C_k^j\left(x^p\right)^{(j)}\left(e^{\mu x}\right)^{(k-j)}=$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_k C_k^j \left(x^p\right)^{(j)} \mu^{k-j} e^{\mu x} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{j!\,(k-j)!} \left(x^p\right)^{(j)} \mu^{k-j} e^{\mu x} = e^{\mu x} \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(x^p\right)^{(j)}}{j!} \sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{(k-j)!} \mu^{k-j} =$$

$$= e^{\mu x} \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(x^p\right)^{(j)}}{j!} \sum_{k=j}^{n} a_k \frac{d^j}{d\mu^j} \mu^k = e^{\mu x} \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(x^p\right)^{(j)}}{j!} \sum_{k=j}^{n} a_k \left(\frac{d^j}{d\lambda^j} \lambda^k\right)\Bigg|_{\lambda=\mu} = \tag{14}$$

$$= e^{\mu x} \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(x^p\right)^{(j)}}{j!} \left[\frac{d^j}{d\lambda^j} \left(\sum_{k=j}^{n} a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^{j-1} a_k \lambda^k\right)\right]\Bigg|_{\lambda=\mu} = e^{\mu x} \sum_{j=0}^{p} \frac{\left(x^p\right)^{(j)}}{j!} \left[\frac{d^j}{d\lambda^j} Q\left(\lambda\right)\right]\Bigg|_{\lambda=\mu}$$

$j \leqslant p < m$

$$L\left(x^p e^{\mu x}\right) = e^{\mu x} \sum_{j=0}^{p} \frac{\left(x^p\right)^{(j)}}{j!} \cdot 0 = 0 \tag{15}$$

$$y_1 = e^{\mu x}, \quad y_2 = x e^{\mu x}, \quad \ldots \quad y_m = x^{m-1} e^{\mu x} \tag{16}$$

что и т.д.

Корень комплексный: $\lambda = \alpha + i\beta$

$$\tilde{y}_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \left(\cos \beta x + i \sin \beta x\right) \tag{17}$$

$\lambda = \alpha - i\beta$ – тоже корень

$$\tilde{y}_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \left(\cos \beta x - i \sin \beta x\right) \tag{18}$$

$$\begin{gathered} \tilde{y} = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x} = \\ = C_1 e^{\alpha x} \left(\cos \beta x + i \sin \beta x\right) + C_2 e^{\alpha x} \left(\cos \beta x - i \sin \beta x\right) = \\ = \left(C_1 + C_2\right) e^{\alpha x} \cos \beta x + \left(C_1 - C_2\right) e^{\alpha x} i \sin \beta x \end{gathered} \tag{19}$$

$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$:

$$y_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{\alpha x} \cos \beta x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) e^{\alpha x} i \sin \beta x = e^{\alpha x} \cos \beta x = \operatorname{Re} \tilde{y}_1 \tag{20}$$

$C_1 = -i\frac{1}{2}$ $C_2 = i\frac{1}{2}$:

$$y_4 = \left(-i\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right) e^{\alpha x} \cos \beta x + \left(-i\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right) e^{\alpha x} i \sin \beta x = e^{\alpha x} \sin \beta x = \operatorname{Im} \tilde{y}_1 \tag{21}$$