1 Уравнения

(96 и 97)

$$y'' + \frac{\alpha}{x} y' + \beta y = 0 \tag{1}$$

замена

$$y = x^{\sigma} z, \qquad y' = x^{\sigma} z' + \sigma x^{\sigma-1} z, \qquad y'' = x^{\sigma} z'' + 2\sigma x^{\sigma-1} z' + \sigma(\sigma-1) x^{\sigma-2} z : \tag{2}$$

тогда

$$\left[x^{\sigma} z'' + 2\sigma x^{\sigma-1} z' + \sigma(\sigma-1) x^{\sigma-2} z\right] + \frac{\alpha}{x}\left[x^{\sigma} z' + \sigma x^{\sigma-1} z\right] + \beta x^{\sigma} z = 0, \tag{3}$$

$$x^{\sigma} z'' + \left[2\sigma x^{\sigma-1} z' + \frac{\alpha}{x} x^{\sigma} z'\right] + \left[\sigma(\sigma-1) x^{\sigma-2} z + \sigma\frac{\alpha}{x} x^{\sigma-1} z + \beta x^{\sigma} z\right] = 0, \tag{4}$$

$$x^{\sigma} z'' + \left[2\sigma \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x}\right] x^{\sigma} z' + \left[\sigma(\sigma-1)\frac{1}{x^2} + \frac{\sigma\alpha}{x^2} + \beta\right] x^{\sigma} z = 0 \Big| \cdot \frac{1}{x^{\sigma}} \tag{5}$$

$$z'' + \frac{2\sigma+\alpha}{x} z' + \left[\frac{\left(\sigma^2 - \sigma + \sigma\alpha\right)}{x^2} + \beta\right] z = 0 \tag{6}$$

$$z'' + \frac{2\sigma+\alpha}{x} z' + \left[\beta - \frac{\sigma - \sigma^2 - \sigma\alpha}{x^2}\right] z = 0. \tag{7}$$

$2\sigma + \alpha = 1$, $\sigma = \frac{1-\alpha}{2}$, $\sigma - \sigma^2 - \sigma\alpha = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$

$$z'' + \frac{1}{x} z' + \left[\beta - \frac{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2}{x^2}\right] z = 0. \tag{8}$$

(98 и 99)

2 Нули и ряды

$$J_{\nu}\left(\mu_k^{(\nu)}\right) = 0, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

При $\nu > -1$

$$\int_0^l J_{\nu}\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} x}{l}\right) J_{\nu}\left(\frac{\mu_m^{(\nu)} x}{l}\right) x dx = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ \frac{l^2}{2}\left[J_{\nu+1}\left(\mu_k^{(\nu)}\right)\right]^2, & m = k. \end{cases} \tag{10}$$

Всякая определённая и непрерывная функция $f(x)$, при $\exists \int_0^l f(x)\sqrt{x} dx$, может быть разложена в ряд по функциям Бесселя:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_{\nu}\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} x}{l}\right). \tag{11}$$

Найдём C_k:

$$\int\limits_0^l dx J_\nu\left(\frac{\mu_m^{(\nu)}x}{l}\right)x\cdot\Bigg| f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}x}{l}\right), \tag{12}$$

$$\int\limits_0^l f(x)J_\nu\left(\frac{\mu_m^{(\nu)}x}{l}\right)xdx=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\int\limits_0^l J_\nu\left(\frac{\mu_m^{(\nu)}x}{l}\right)J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}x}{l}\right)xdx=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\delta_{mk}\frac{l^2}{2}\left[J_{\nu+1}\left(\mu_k^{(\nu)}\right)\right]^2=C_m\frac{l^2}{2}\left[J_{\nu+1}\left(\mu_m^{(\nu)}\right)\right]^2, \tag{13}$$

$(m=k,\, x=\xi)$

$$C_k=\frac{2}{l^2\left[J_{\nu+1}\left(\mu_k^{(\nu)}\right)\right]^2}\int\limits_0^l f(\xi)J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}\xi}{l}\right)\xi d\xi. \tag{14}$$

№ 100. Разложить функцию $f(x)=1$ в ряд по функциям Бесселя нулевого порядка ($\nu=0$).

Общий вид этого разложения:

$$1=\sum_{k=1}^{\infty}C_k J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}x}{l}\right). \tag{15}$$

Найдём C_k:

$$C_k=\frac{2}{l^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2}\int\limits_0^l 1J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}\xi}{l}\right)\xi d\xi= \tag{16}$$

Заменим $\frac{\mu_k^{(0)}\xi}{l}=\zeta$, $\xi=\frac{l\zeta}{\mu_k^{(0)}}$

$$=\frac{2}{l^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2}\int\limits_0^{\mu_k^{(0)}}J_0(\zeta)\frac{l\zeta}{\mu_k^{(0)}}d\frac{l\zeta}{\mu_k^{(0)}}=\frac{2}{l^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2}\frac{l^2}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}\int\limits_0^{\mu_k^{(0)}}J_0(\zeta)\zeta d\zeta=\frac{2}{\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\mu_k^{(0)}\right]^2}\int\limits_0^{\mu_k^{(0)}}J_0(\zeta)\zeta d\zeta.$$

$$\frac{\nu}{x}J_\nu(x)+J_\nu'(x)=J_{\nu-1}(x). \tag{17}$$

При $\nu=1$

$$\frac{1}{x}J_1(x)+J_1'(x)=J_0(x). \tag{18}$$

$$\int\limits_0^{\mu_k^{(0)}}J_0(\zeta)\zeta d\zeta=\int\limits_0^{\mu_k^{(0)}}\left[\frac{1}{\zeta}J_1(\zeta)+J_1'(\zeta)\right]\zeta d\zeta=\int\limits_0^{\mu_k^{(0)}}J_1(\zeta)d\zeta+\int\limits_0^{\mu_k^{(0)}}J_1'(\zeta)\zeta d\zeta=$$

$$=\int\limits_0^{\mu_k^{(0)}}J_1(\zeta)d\zeta+J_1(\zeta)\zeta\Big|_0^{\mu_k^{(0)}}-\int\limits_0^{\mu_k^{(0)}}J_1(\zeta)d\zeta=J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\mu_k^{(0)}. \tag{19}$$

Тогда

$$C_k = \frac{2}{\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\mu_k^{(0)}\right]^2}\int\limits_0^{\mu_k^{(0)}} J_0\left(\zeta\right)\zeta d\zeta = \frac{2}{\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\mu_k^{(0)}\right]^2} J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\mu_k^{(0)} = \frac{2}{J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\mu_k^{(0)}}, \tag{20}$$

откуда:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}x}{l}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\mu_k^{(0)}} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}x}{l}\right). \tag{21}$$

(101 - 103)