

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

$$(\lambda - 1)^2 - 4 = 0, \quad \lambda = 1 \pm 2 \quad (15)$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3 \quad (16)$$

1) $\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{cases} 2a - b = 0, \\ -4a + 2b = 0, \end{cases} \quad b = 2a, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

2) $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{cases} -2a - b = 0, \\ -4a - 2b = 0, \end{cases} \quad b = -2a, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t} \quad (19)$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}. \end{cases} \quad (20)$$

(786, 788)

3 Комплексный корень

Выбираем одно из $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

$$(A - \lambda E) v_c = 0, \quad X_c = v_c e^{\lambda t} \quad (21)$$

$$X_1 = \operatorname{Re} X_c, \quad X_2 = \operatorname{Im} X_c \quad (22)$$

№790

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases} \quad (23)$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

$$(\lambda - 1)^2 + 9 = 0, \quad \lambda = 1 \pm 3i \quad (26)$$

$$\lambda_1 = 1 + 3i, \quad \lambda_2 = 1 - 3i \quad (27)$$

Возьмём λ_2 :

$$\begin{pmatrix} 3i & -3 \\ 3 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{cases} 3ia - 3b = 0, \\ 3a + 3ib = 0, \end{cases} \quad b = ia, \quad v_c = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$X_c = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1-3i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^t (\cos 3t - i \sin 3t) = \begin{pmatrix} \cos 3t - i \sin 3t \\ i \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} e^t + i \begin{pmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} e^t \quad (29)$$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} e^t \quad (30)$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^t \cos 3t - C_2 e^t \sin 3t, \\ y = C_1 e^t \sin 3t + C_2 e^t \cos 3t. \end{cases} \quad (31)$$

(789)

4 Кратный корень с равными кратностями

λ - корень кратности k . Можно найти лин. независимые принадлежащие ему $v_1 \dots v_m$. m - геометрическая кратность; k - алгебраическая. Пусть $m = k$:

$$X_1 = v_1 e^{\lambda t}, \quad \dots \quad X_k = v_k e^{\lambda t}, \quad (32)$$

$$X = C_1 X_1 + \dots + C_k X_k + \dots \quad (33)$$

№804

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases} \quad (34)$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 3 \quad (35)$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{cases} 2a - b - c = 0 \\ a - c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} c = a \\ b = a \end{cases}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \quad a - b - c = 0 \times 3, \quad a = b + c, \quad v_{2,3} = \begin{pmatrix} b+c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c \quad (38)$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \quad (40)$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{3t} \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ z = C_1 e^{2t} + C_3 e^{3t} \end{cases} \quad (41)$$

(805)

5 Кратный корень с неравными кратностями

λ - корень $k < m$,

$$X = \begin{pmatrix} P_{k-m}^1(t) \\ \vdots \\ P_{k-m}^n(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t} \quad (42)$$

№794

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases} \quad (43)$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (45)$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 1) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -1 \quad (46)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{cases} -2a + 2b = 0, \\ -2a + 2b = 0, \end{cases} \quad b = a, \quad v = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a \quad (47)$$

$k = 2, m = 1, k - m = 1$

$$X = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \begin{cases} x = (at + b) e^{-t} \\ y = (ct + d) e^{-t} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = -(at + b - a) e^{-t} \\ \dot{y} = -(ct + d - c) e^{-t} \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} -(at + b - a) e^{-t} = 2(ct + d) e^{-t} - 3(at + b) e^{-t} \\ -(ct + d - c) e^{-t} = (ct + d) e^{-t} - 2(at + b) e^{-t} \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{cases} -at - b + a = 2ct + 2d - 3at - 3b \\ -ct - d + c = ct + d - 2at - 2b \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{cases} 2at - 2ct = -a - 2b + 2d \\ 2at - 2ct = -2b - c + 2d \end{cases} \quad (51)$$

$$\begin{cases} -a - 2b + 2d = 0 \\ -2b - c + 2d = 0 \\ 2a - 2c = 0 \\ 2a - 2c = 0 \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{cases} a + 2b - 2d = 0 \\ 2b + c - 2d = 0 \\ a = c \end{cases} \quad (53)$$

$$a = c = -2b + 2d, \quad X = \begin{pmatrix} (-2b + 2d)t + b \\ (-2b + 2d)t + d \end{pmatrix} e^{-t} = b \begin{pmatrix} -2t + 1 \\ -2t \end{pmatrix} e^{-t} + d \begin{pmatrix} 2t \\ 2t + 1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (54)$$

$b \equiv C_1, d \equiv C_2$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} -2t + 1 \\ -2t \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 2t \\ 2t + 1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (55)$$

$$\begin{cases} x = -C_1(2t - 1)e^{-t} + 2C_2te^{-t}, \\ y = -2C_1te^{-t} + C_2(2t + 1)e^{-t}. \end{cases} \quad (56)$$

(792)