1 Векторы и базисы в линейном пространстве

Базис (правило Эйнштейна) $\vec{x} \in L$, $\vec{e}_k \in L$

$$(\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n) \tag{1}$$

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + \dots + x^n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x^i\vec{e}_i = x^i\vec{e}_i \tag{2}$$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)\, X \tag{3}$$

Новый базис:

$$(\vec{e}'_1 \dots \vec{e}'_n) = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)\, S \tag{4}$$

$$S = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 & \cdots & e_n^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & \cdots & e_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1^n & e_2^n & \cdots & e_n^n \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$SS^{-1} = S^{-1}S = E, \quad e_k^i \left(e^{-1}\right)_j^k = \left(e^{-1}\right)_k^i e_j^k = \delta_j^i \tag{6}$$

Смена базиса для вектора:

$$\vec{x} = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)\, X = (\vec{e}'_1 \dots \vec{e}'_n)\, X' = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)\, SX' \tag{7}$$

$$(\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)\,(X - SX') = 0 \tag{8}$$

$$\vec{e}_i \left(x^i - e_k^i x'^k\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{x^i = e_k^i x'^k} \tag{9}$$

$$X - SX' = 0 \tag{10}$$

$$X = SX', \qquad X' = S^{-1}X \tag{11}$$

$$\boxed{x'^i = \left(e^{-1}\right)_k^i x^k} \tag{12}$$

2 Ковекторы и дуальные базисы в дуальном пространстве

Лин. форма (ковектор)

$$\varphi : L \to \mathbb{R}\varphi\,(\vec{x}) = \varkappa \tag{13}$$

$$\varphi\,(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\varphi\,(\vec{x}) + \beta\varphi\,(\vec{y}) \tag{14}$$

$$\varphi\,(\vec{x}) = \varphi\left(x^1\vec{e}_1 + \dots + x^n\vec{e}_n\right) = x^1\varphi\,(\vec{e}_1) + \dots + x^n\varphi\,(\vec{e}_n) \tag{15}$$

$$\varphi\,(\vec{e}_k) \equiv \varphi_k, \qquad \varphi\,(\vec{x}) = x^k\varphi_k \tag{16}$$

Сумма форм

$$(\varphi + \psi)\,(\vec{x}) = \varphi\,(\vec{x}) + \psi\,(\vec{x}) = x^k\,(\varphi_k + \psi_k) \tag{17}$$

Умножение формы на число

$$\alpha\varphi\,(\vec{x}) = \alpha x^k\varphi_k = x^k\,(\alpha\varphi_k) \tag{18}$$

$\varphi \in L^*$ - дуальное пространство к L, φ - ковекторы.

Базисные формы:

$$\epsilon^1 = (1, 0, \dots, 0)\,, \quad \epsilon^2 = (0, 1, \dots, 0)\,, \qquad \dots \qquad \epsilon^n = (0, 0, \dots, 1) \tag{19}$$

$$\epsilon^i\,(\vec{e}_k) = \delta_k^i \tag{20}$$

$$\varphi_i\epsilon^i\,(\vec{x}) = \varphi_i\epsilon^i\left(x^k\vec{e}_k\right) = x^k\varphi_i\epsilon^i\,(\vec{e}_k) = x^k\varphi_i\delta_k^i = x^k\varphi_k = \varphi\,(\vec{x}) \tag{21}$$

$\epsilon^1 \dots \epsilon^n$ - базис в L^*, дуальный к $(\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)$.

Смена базиса для ковектора:

$$\varphi\,(\vec{x}) = x'^k\varphi'_k = x^i\varphi_i = e_k^i x'^k\varphi_i \tag{22}$$

$$x'^k\left(\varphi'_k - e_k^i\varphi_i\right) = 0, \quad \forall\vec{x} \tag{23}$$

$$x'^k = \delta_1^k \quad \Longrightarrow \quad \varphi'_1 - e_1^i\varphi_i = 0, \tag{24}$$

$$x'^k = \delta_2^k \quad \Longrightarrow \quad \varphi'_2 - e_2^i\varphi_i = 0, \tag{25}$$

и т.д.

$$\boxed{\varphi'_k = e_k^i\varphi_i, \quad \varphi_i = \left(e^{-1}\right)_i^k \varphi'_k} \tag{26}$$

3 Тензоры

Понятие тензора

$$T\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right)=\alpha\in\mathbb{R},\qquad \vec{x}_\alpha\in L,\quad \omega^\beta\in L^* \tag{27}$$

$$T\left(\vec{x}_1,\ldots,a\vec{x}_\alpha+b\vec{y},\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right)=aT\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_\alpha,\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right)+bT\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{y},\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right) \tag{28}$$

$$\vec{x}_\alpha=x^i_\alpha\vec{e}_i\in L,\quad \omega^j=\omega^\beta_j\epsilon^j\in L^*,\quad \epsilon^j\left(\vec{e}_i\right)=\delta^j_i. \tag{29}$$

$$T\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right)=T\left(x^{i_1}_1\vec{e}_{i_1},\ldots,x^{i_p}_p\vec{e}_{i_p},\,\omega^1_{j_1}\epsilon^{j_1},\ldots,\omega^q_{j_q}\epsilon^{j_q}\right)= \tag{30}$$

$$=x^{i_1}_1\ldots x^{i_p}_p\omega^1_{j_1}\ldots\omega^q_{j_q}T\left(\vec{e}_{i_1},\ldots,\vec{e}_{i_p},\,\epsilon^{j_1},\ldots,\epsilon^{j_q}\right)=x^{i_1}_1\ldots x^{i_p}_p\omega^1_{j_1}\ldots\omega^q_{j_q}T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p},$$

где

$$T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\equiv T\left(\vec{e}_{i_1},\ldots,\vec{e}_{i_p},\,\epsilon^{j_1},\ldots,\epsilon^{j_q}\right). \tag{31}$$

Преобразование компонент тензоров при смене базиса

$$x^i=e^i_{i'}x^{i'},\qquad \omega_j=\left(e^{-1}\right)^{j'}_j\omega_{j'} \tag{32}$$

$$T=x^{i'_1}_1\ldots x^{i'_p}_p\omega^1_{j'_1}\ldots\omega^q_{j'_q}T^{j'_1\ldots j'_q}_{i'_1\ldots i'_p}=x^{i_1}_1\ldots x^{i_p}_p\omega^1_{j_1}\ldots\omega^q_{j_q}T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}= \tag{33}$$

$$=\left[e^{i_1}_{i'_1}x^{i'_1}_1\right]\ldots\left[e^{i_p}_{i'_p}x^{i'_p}_p\right]\cdot\left\{\left(e^{-1}\right)^{j'_1}_{j_1}\omega^1_{j'_1}\right\}\ldots\left\{\left(e^{-1}\right)^{j'_q}_{j_q}\omega^q_{j'_q}\right\}\cdot T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$$

$$x^{i'_1}_1\ldots x^{i'_p}_p\omega^1_{j'_1}\ldots\omega^q_{j'_q}T^{j'_1\ldots j'_q}_{i'_1\ldots i'_p}-\left[e^{i_1}_{i'_1}x^{i'_1}_1\right]\ldots\left[e^{i_p}_{i'_p}x^{i'_p}_p\right]\cdot\left\{\left(e^{-1}\right)^{j'_1}_{j_1}\omega^1_{j'_1}\right\}\ldots\left\{\left(e^{-1}\right)^{j'_q}_{j_q}\omega^q_{j'_q}\right\}\cdot T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}=0 \tag{34}$$

$$x^{i'_1}_1\ldots x^{i'_p}_p\omega^1_{j'_1}\ldots\omega^q_{j'_q}\left(T^{j'_1\ldots j'_q}_{i'_1\ldots i'_p}-e^{i_1}_{i'_1}\ldots e^{i_p}_{i'_p}\cdot\left(e^{-1}\right)^{j'_1}_{j_1}\ldots\left(e^{-1}\right)^{j'_q}_{j_q}\cdot T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\right)=0 \tag{35}$$

$\forall\ x^{i_1}_1\ldots x^{i_p}_p\omega^1_{j_1}\ldots\omega^q_{j_q}$:

$$\boxed{T^{j'_1\ldots j'_q}_{i'_1\ldots i'_p}=e^{i_1}_{i'_1}\ldots e^{i_p}_{i'_p}\cdot\left(e^{-1}\right)^{j'_1}_{j_1}\ldots\left(e^{-1}\right)^{j'_q}_{j_q}\cdot T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}} \tag{36}$$