Условия задачи:

$$U = U(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geqslant 0.$$

$$U_t = a^2 U_{xx} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} U = \lim_{x\to\pm\infty} U_x = 0 \tag{2}$$

$$U|_{t=0} = \begin{cases} 0, & |x| > h \\ -T, & -h < x < 0 \\ T, & 0 < x < h \end{cases} \tag{3}$$

Преобразования Фурье туда и оттуда:

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \tag{4}$$

$$\bar{U}(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U e^{-i\lambda x} dx \tag{5}$$

Применим их к (1):

$$U_t e^{-i\lambda x} = a^2 U_{xx} e^{-i\lambda x} \tag{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U_t e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a^2 U_{xx} e^{-i\lambda x} dx \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U e^{-i\lambda x} dx\right) = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} U_x e^{-i\lambda x} dx = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} U_x e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U_x \frac{\partial}{\partial x} e^{-i\lambda x} dx =$$

$$= \frac{i\lambda a^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U_x e^{-i\lambda x} dx = \frac{i\lambda a^2}{\sqrt{2\pi}} U e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\lambda a^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U \frac{\partial}{\partial x} e^{-i\lambda x} dx = \tag{8}$$

$$-\lambda^2 a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U e^{-i\lambda x} dx$$

$$\bar{U}_t = -\lambda^2 a^2 \bar{U}. \tag{9}$$

Найдём Фурье-образ $\bar{U}$:

$$\ln\left|\bar{U}\right| = -\lambda^2 a^2 t + \tilde{\varphi}(\lambda), \quad \Longrightarrow \quad \bar{U} = \varphi(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t}. \tag{10}$$

Чтобы найти $\varphi(\lambda)$, преобразуем (3):

$$\bar{U}\big|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U|_{t=0}\, e^{-i\lambda x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int\limits_{-\infty}^{-h} U|_{t=0}\, e^{-i\lambda x} dx + \int\limits_{-h}^{0} U|_{t=0}\, e^{-i\lambda x} dx + \int\limits_{0}^{h} U|_{t=0}\, e^{-i\lambda x} dx + \int\limits_{h}^{\infty} U|_{t=0}\, e^{-i\lambda x} dx\right] = \tag{11}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int\limits_{-h}^{0} (-T)\, e^{-i\lambda x} dx + \int\limits_{0}^{h} T e^{-i\lambda x} dx \right] = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \left[-\int\limits_{-h}^{0} e^{-i\lambda x} dx + \int\limits_{0}^{h} e^{-i\lambda x} dx \right].$$

С другой стороны,

$$\bar{U}\Big|_{t=0} = \varphi(\lambda)\, e^{-\lambda^2 a^2 t}\Big|_{t=0} = \varphi(\lambda), \tag{12}$$

$$\varphi(\lambda) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \left[-\int\limits_{-h}^{0} e^{-i\lambda\xi} d\xi + \int\limits_{0}^{h} e^{-i\lambda\xi} d\xi \right]. \tag{13}$$

$$\bar{U} = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \left[-\int\limits_{-h}^{0} e^{-i\lambda\xi} d\xi + \int\limits_{0}^{h} e^{-i\lambda\xi} d\xi \right] e^{-\lambda^2 a^2 t}. \tag{14}$$

Найдём саму функцию U:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{U} e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \left[-\int\limits_{-h}^{0} e^{-i\lambda\xi} d\xi + \int\limits_{0}^{h} e^{-i\lambda\xi} d\xi \right] e^{-\lambda^2 a^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda = \tag{15}$$

$$= \frac{T}{2\pi} \left[\int\limits_{0}^{h} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t - i\lambda(\xi - x)} d\lambda d\xi - \int\limits_{-h}^{0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t - i\lambda(\xi - x)} d\lambda d\xi \right].$$

Отдельно вычислим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t - i\lambda(\xi - x)} d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\left(\lambda a\sqrt{t}\right)^2 + i\lambda(\xi - x) + \left(\frac{i(\xi - x)}{2a\sqrt{t}}\right)^2 - \left(\frac{i(\xi - x)}{2a\sqrt{t}}\right)^2 \right)} d\lambda =$$

$$= e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\lambda a\sqrt{t} + \frac{i(\xi - x)}{2a\sqrt{t}}\right)^2} d\lambda. \tag{16}$$

$\lambda a\sqrt{t} + \frac{i(\xi - x)}{2a\sqrt{t}} = \gamma$, $d\lambda \cdot a\sqrt{t} = d\gamma$, $d\lambda = \frac{d\gamma}{a\sqrt{t}}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t - i\lambda(\xi - x)} d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2} d\gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}.$$

Тогда

$$U = \frac{T}{2\pi} \left[\int\limits_{0}^{h} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t - i\lambda(\xi - x)} d\lambda d\xi - \int\limits_{-h}^{0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t - i\lambda(\xi - x)} d\lambda d\xi \right] =$$

$$= \frac{T}{2\pi} \left[\int\limits_{0}^{h} \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi - \int\limits_{-h}^{0} \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi \right] == \frac{T}{2a\sqrt{\pi t}} \left[\int\limits_{0}^{h} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi - \int\limits_{-h}^{0} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi \right]. \tag{17}$$