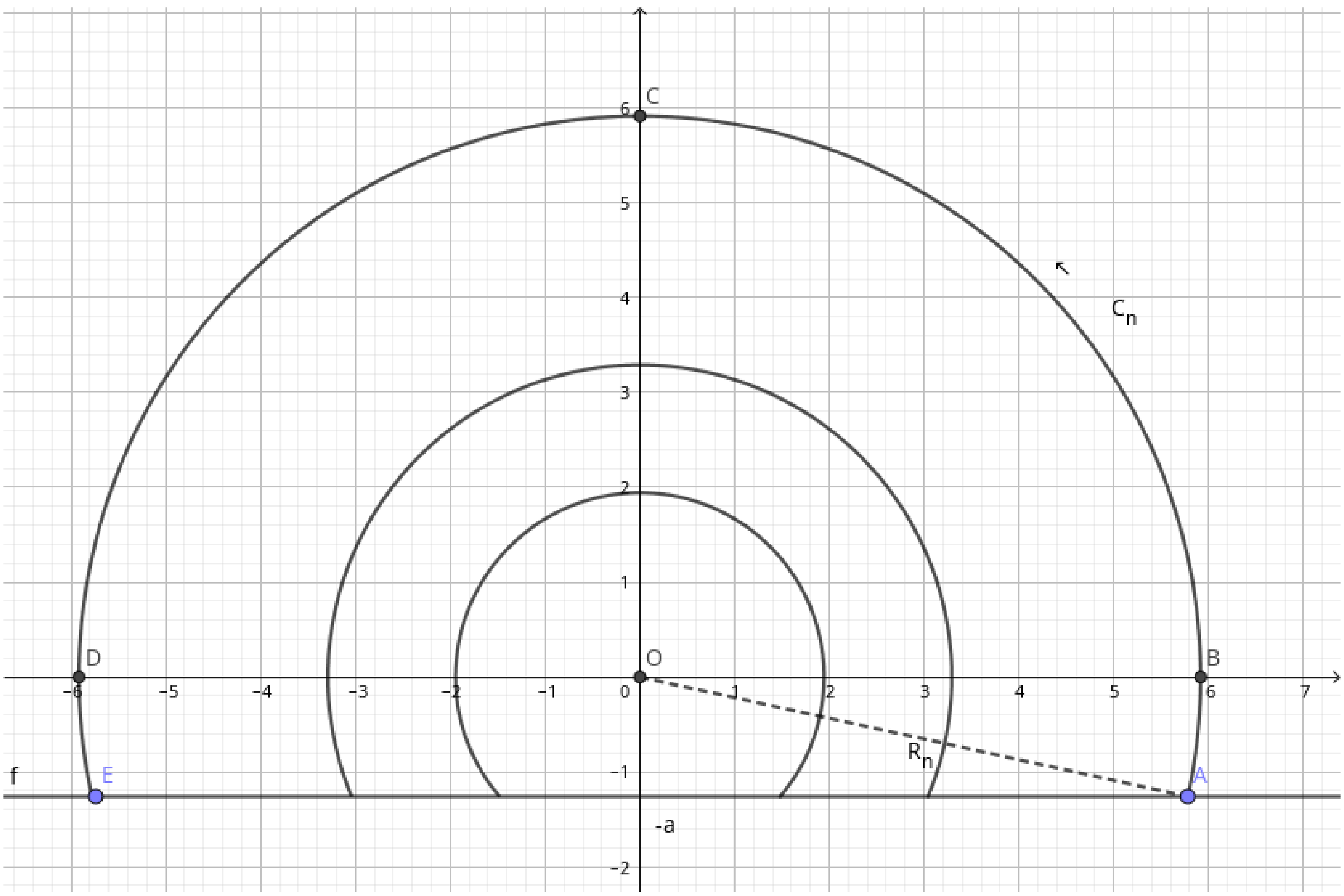
1 Лемма Жордана



$$\lim_{R_n \to \infty} \int\limits_{C_n} g(z)\, e^{i\lambda z} dz = 0, \qquad \lambda > 0 \tag{1}$$

1.1 AB

$z = R_n e^{i\varphi}$, $dz = R_n i e^{i\varphi} d\varphi$, $|dz| = R_n d\varphi$,

$$\left| e^{i\lambda z} \right| = \left| e^{i\lambda(x+iy)} \right| = \left| e^{i\lambda x} e^{-\lambda y} \right| = e^{-\lambda y} \tag{2}$$

$$0 \leqslant \left| \int\limits_{AB} g(z)\, e^{i\lambda z} dz \right| \leqslant \int\limits_{AB} |g(z)| \left| e^{i\lambda z} \right| |dz| = \int\limits_{\varphi_0}^{0} |g(z)|\, e^{-\lambda y} R_n d\varphi \leqslant \tag{3}$$

где $\varphi_0 = -\arcsin\frac{a}{R_n}$. Далее: $-a \leqslant y \leqslant 0$, $a\lambda \geqslant -\lambda y \geqslant 0$, $e^{a\lambda} \geqslant e^{-\lambda y} \geqslant 1$

$$\leqslant R_n \int\limits_{\varphi_0}^{0} |g(z)| e^{a\lambda} d\varphi = R_n e^{a\lambda} \int\limits_{\varphi_0}^{0} |g(z)| d\varphi \leqslant R_n e^{a\lambda}(0-\varphi_0) \max_{\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant 0} |g(z)| =$$

$$= e^{a\lambda} R_n \arcsin\frac{a}{R_n} \max_{\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant 0} |g(z)| = e^{a\lambda} a \frac{\arcsin\frac{a}{R_n}}{\frac{a}{R_n}} \max_{\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant 0} |g(z)|. \tag{4}$$

1-й зам. предел:

$$\lim_{R_n \to \infty} \frac{\arcsin\frac{a}{R_n}}{\frac{a}{R_n}} = 1 \tag{5}$$

Если

$$\lim_{R_n \to \infty} \max_{-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}} |g(z)| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{R_n \to \infty} \max_{\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant 0} |g(z)| = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{R_n \to \infty} e^{a\lambda} a \frac{\arcsin\frac{a}{R_n}}{\frac{a}{R_n}} \max_{\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant 0} |g(z)| = e^{a\lambda} a \cdot 1 \cdot 0 = 0; \tag{7}$$

по т. о двух милиционерах

$$\lim_{R_n \to \infty} \left| \int\limits_{AB} g(z) e^{i\lambda z} dz \right| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{R_n \to \infty} \int\limits_{AB} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0. \tag{8}$$

1.2 BC

$$0 \leqslant \left| \int\limits_{BC} g(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leqslant \int\limits_{BC} |g(z)| \left| e^{i\lambda z} \right| |dz| = \int\limits_{0}^{\pi/2} |g(z)| \left| e^{i\lambda z} \right| R_n d\varphi; \tag{9}$$

$z = R_n e^{i\varphi} = R_n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, при $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\frac{2\varphi}{\pi} \leqslant \sin\varphi \leqslant \varphi \quad \Longrightarrow \quad -\sin\varphi \leqslant -\frac{2\varphi}{\pi}, \tag{10}$$

$$\left| e^{i\lambda z} \right| = \left| e^{i\lambda R_n(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \right| = \left| e^{i\lambda R_n \cos\varphi} e^{-\lambda R_n \sin\varphi} \right| = e^{-\lambda R_n \sin\varphi} \leqslant e^{-\lambda R_n \frac{2\varphi}{\pi}} = e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi}\varphi}, \tag{11}$$

$$0 \leqslant \left| \int\limits_{BC} g(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leqslant \int\limits_{0}^{\pi/2} |g(z)| \left| e^{i\lambda z} \right| R_n d\varphi \leqslant R_n \int\limits_{0}^{\pi/2} |g(z)| e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi}\varphi} d\varphi \leqslant R_n \int\limits_{0}^{\pi/2} \max_{0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}} |g(z)| e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi}\varphi} d\varphi =$$

$$= R_n \max_{0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}} |g(z)| \int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi}\varphi} d\varphi = R_n \max_{0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}} |g(z)| \left. \frac{e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi}\varphi}}{-\frac{2\lambda R_n}{\pi}} \right|_{0}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2\lambda R_n} R_n \max_{0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}} |g(z)| \left(e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi}\frac{\pi}{2}} - 1 \right) =$$

$\lambda R_n > 0$,

$$= \frac{\pi}{2\lambda} \max_{0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}} |g(z)| \left(1 - e^{-\lambda R_n} \right). \tag{12}$$

Если

$$\lim_{R_n\to\infty}\max_{-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}}|g(z)|=0\quad\Longrightarrow\quad\lim_{R_n\to\infty}\max_{0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}}|g(z)|=0, \tag{13}$$

$$\lim_{R_n\to\infty}\frac{\pi}{2\lambda}\max_{0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}}|g(z)|\left(1-e^{-\lambda R_n}\right)=0\quad\Longrightarrow\quad\lim_{R_n\to\infty}\left|\int\limits_{BC}g(z)\,e^{i\lambda z}dz\right|=0 \tag{14}$$

$$\Longrightarrow\quad\lim_{R_n\to\infty}\int\limits_{BC}g(z)\,e^{i\lambda z}dz=0 \tag{15}$$

CD аналогично BC, DE аналогично AB,

$$\lim_{R_n\to\infty}\int\limits_{C_n}g(z)\,e^{i\lambda z}dz=0. \tag{16}$$

2 9.32

$$\int\limits_0^\infty\frac{x\sin x}{x^2+b^2}dx \tag{17}$$

$$f(x)=\frac{x\sin x}{x^2+b^2}, \tag{18}$$

$f(-x)=-f(x)$

$$\int\limits_0^\infty\frac{x\sin x}{x^2+b^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{x\sin x}{x^2+b^2}dx \tag{19}$$

Выберем

$$g(z)=\frac{z}{z^2+b^2} \tag{20}$$

$$\left|z^2+b^2\right|=\left|z^2-\left(-b^2\right)\right|\geqslant\left|z^2\right|-\left|-b^2\right|=R^2-|b|^2 \tag{21}$$

$R>|b|$

$$\frac{1}{|z^2+b^2|}\leqslant\frac{1}{R^2-|b|^2} \tag{22}$$

$$0\leqslant\left|\frac{z}{z^2+b^2}\right|\leqslant\frac{R}{R^2-|b|^2} \tag{23}$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R}{R^2-|b|^2}=0,\quad\Longrightarrow\quad\lim_{R\to\infty}\max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi}\left|\frac{z}{z^2+b^2}\right|=0\quad\Longrightarrow\quad\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|z|=R}\frac{ze^{i\lambda z}}{z^2+b^2}dz=0 \tag{24}$$

$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $\lambda=1$

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{D_n}\frac{ze^{iz}}{z^2+b^2}dz=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|z|=R}\frac{ze^{iz}}{z^2+b^2}dz+\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{xe^{ix}}{x^2+b^2}dx=\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{xe^{ix}}{x^2+b^2}dx=2\pi i\sum_{k=1}^N\operatorname{res}_{z_k}\frac{ze^{iz}}{z^2+b^2}, \tag{25}$$

$\mathrm{Im} z_k > 0$

$$z_1 = i\left|b\right|, \qquad z_2 = -i\left|b\right|, \qquad \mathrm{Im} z_2 = -\left|b\right| < 0 \tag{26}$$

берём z_1.

$$\left.\frac{ze^{iz}}{z^2+b^2}\left(z-z_1\right)^1\right|_{z=z_1} = \left.\frac{ze^{iz}}{\left(z+i\left|b\right|\right)\left(z-i\left|b\right|\right)}\left(z-i\left|b\right|\right)\right|_{z=i|b|} = \frac{i\left|b\right|e^{ii|b|}}{i\left|b\right|+i\left|b\right|} = \frac{e^{-|b|}}{2} \neq 0, \tag{27}$$

В силу первого порядка,

$$\mathrm{res}_{z_1}\frac{ze^{iz}}{z^2+b^2} = \left.\frac{ze^{iz}}{z^2+b^2}\left(z-z_1\right)^1\right|_{z=z_1} = \frac{e^{-|b|}}{2} \tag{28}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+b^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\left(\cos x + i\sin x\right)}{x^2+b^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2+b^2}dx + i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+b^2}dx = 2\pi i\,\mathrm{res}_{z_1}\frac{ze^{iz}}{z^2+b^2} = 2\pi i\frac{e^{-|b|}}{2} = \pi i e^{-|b|} \tag{29}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+b^2}dx = \pi e^{-|b|} \tag{30}$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+b^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-|b|} \tag{31}$$