1 №1175

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2y+z \tag{1}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{2y}=\frac{dz}{x^2y+z} \tag{2}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{2y},\quad 2\ln|x|-\ln|y|=\tilde{C}_1,\quad \ln\frac{x^2}{|y|}=\tilde{C}_1,\quad \frac{x^2}{y}=C_1 \tag{3}$$

$$\frac{dy}{2y}=\frac{dz}{C_1y^2+z},\qquad \frac{C_1y^2+z}{2y}=\frac{dz}{dy} \tag{4}$$

$$\frac{dz}{dy}-\frac{z}{2y}=\frac{C_1}{2}y \tag{5}$$

линейное

$$\frac{dz_0}{dy}-\frac{z_0}{2y}=0,\quad \frac{dz_0}{z_0}=\frac{dy}{2y},\quad z_0=\sqrt{|y|} \tag{6}$$

$$z=z_0z_1=\sqrt{|y|}z_1 \tag{7}$$

$$\operatorname{sgn} y\frac{z_1}{2\sqrt{|y|}}+\sqrt{|y|}z_1'-\frac{\sqrt{|y|}z_1}{2y}=\frac{C_1}{2}y\,\Bigg|\,\frac{1}{\sqrt{|y|}} \tag{8}$$

$$\operatorname{sgn} y\frac{z_1}{2\sqrt{|y|}^2}+z_1'-\frac{z_1}{2y}=\frac{C_1y}{2\sqrt{|y|}}=\operatorname{sgn} y\frac{C_1\,|y|}{2\sqrt{|y|}}=\operatorname{sgn} y\frac{C_1}{2}\sqrt{|y|} \tag{9}$$

$$z_1'=\operatorname{sgn} y\frac{C_1}{2}\sqrt{|y|},\quad z_1=\frac{C_1}{3}\,|y|^{3/2}+C_2,\quad z=\sqrt{|y|}z_1=\sqrt{|y|}\left(\frac{C_1}{3}\,|y|^{3/2}+C_2\right)=$$

$$=\frac{\frac{x^2}{y}}{3}y^2+C_2\sqrt{|y|}=\frac{1}{3}x^2y+C_2\sqrt{|y|} \tag{10}$$

$$\frac{3z-x^2y}{3\sqrt{|y|}}=C_2 \tag{11}$$

$$\begin{cases}\varphi=\frac{x^2}{y}=C_1,\\ \psi=\frac{3z-x^2y}{3\sqrt{|y|}}=C_2.\end{cases} \tag{12}$$

z связан с x и y уравнением

$$\psi=f(\varphi) \tag{13}$$

$$\frac{3z-x^2y}{3\sqrt{|y|}}=f\left(\frac{x^2}{y}\right), \tag{14}$$

$\forall f$.

$$z=\sqrt{|y|}f\left(\frac{x^2}{y}\right)+\frac{1}{3}x^2y \tag{15}$$

Для проверки продифференируем

$$z'_x = \sqrt{|y|} f'\left(\frac{x^2}{y}\right)\frac{2x}{y} + \frac{2}{3}xy \tag{16}$$

$$z'_y = \frac{\operatorname{sgn} y}{2\sqrt{|y|}} f\left(\frac{x^2}{y}\right) - \sqrt{|y|} f'\left(\frac{x^2}{y}\right)\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{3}x^2 \tag{17}$$

и подставим в исходное уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y + z \tag{18}$$

полученное:

$$\begin{gathered} x\left[\sqrt{|y|} f'\left(\frac{x^2}{y}\right)\frac{2x}{y} + \frac{2}{3}xy\right] + 2y\left[\frac{\operatorname{sgn} y}{2\sqrt{|y|}} f\left(\frac{x^2}{y}\right) - \sqrt{|y|} f'\left(\frac{x^2}{y}\right)\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{3}x^2\right] - \left[x^2 y + \sqrt{|y|} f\left(\frac{x^2}{y}\right) + \frac{1}{3}x^2 y\right] = \\ = \frac{2x^2}{y}\sqrt{|y|} f'\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{2x^2}{y}\sqrt{|y|} f'\left(\frac{x^2}{y}\right) + 2y\frac{\operatorname{sgn} y}{2\sqrt{|y|}} f\left(\frac{x^2}{y}\right) + \frac{4}{3}x^2 y - \frac{4}{3}x^2 y - \sqrt{|y|} f\left(\frac{x^2}{y}\right) = \\ = \frac{|y|}{\sqrt{|y|}} f\left(\frac{x^2}{y}\right) - \sqrt{|y|} f\left(\frac{x^2}{y}\right) = 0, \end{gathered} \tag{19}$$

что и т.д.

(1173, 1174.)

2 №1196

Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy, \tag{20}$$

и проходящую через линию

$$x = 2, \quad z = y^2 + 1. \tag{21}$$

Составим систему

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - xy} \tag{22}$$

и начнём её решать.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0, \quad \ln|x| - \ln|y| = \tilde{C}_1, \quad \frac{x}{y} = C_1 \tag{23}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - xy} = \frac{dz}{z - C_1 y^2} \tag{24}$$

$$\left(z - C_1 y^2\right) dy = ydz, \quad -C_1 y^2 dy = ydz - zdy \tag{25}$$

$$-C_1 dy = \frac{ydz - zdy}{y^2} = d\frac{z}{y}, \quad d\frac{z}{y} + C_1 dy = 0 \tag{26}$$

$$\frac{z}{y} + \frac{x}{y}y = C_2 \tag{27}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi=\frac{x}{y}=C_1\\ \psi=\frac{z}{y}+x=C_2\end{array}\right. \tag{28}$$

Если поверхность $\psi = f(\varphi)$ проходит через линию $x = 2$, $z = y^2 + 1$, то на этой линии

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi=\frac{2}{y}\\ \psi=\frac{y^2+1}{y}+2\end{array}\right. \tag{29}$$

$$y=\frac{2}{\varphi},\quad \frac{\left(\frac{2}{\varphi}\right)^2+1}{\frac{2}{\varphi}}+2=\psi, \tag{30}$$

$$\frac{\frac{4}{\varphi}+\varphi}{2}+2=\psi \tag{31}$$

$$\frac{4}{\varphi}+\varphi-2\psi+4=0 \tag{32}$$

$$\frac{4}{\frac{x}{y}}+\frac{x}{y}-2\left(\frac{z}{y}+x\right)+4=0 \tag{33}$$

$$\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}-2\frac{z}{y}-2x+4=0. \tag{34}$$

Проверяем. На линии

$$x=2,\quad z=y^2+1 \tag{35}$$

получается

$$2y+\frac{2}{y}-2\frac{y^2+1}{y}=0. \tag{36}$$

$$2y-2y=0. \tag{37}$$

Производные:

$$-\frac{4y}{x^2}+\frac{1}{y}-2\frac{z'_x}{y}-2=0,\qquad z'_x=-\frac{2y^2}{x^2}+\frac{1}{2}-y \tag{38}$$

$$\frac{4}{x}-\frac{x}{y^2}-2\frac{z'_y}{y}+2\frac{z}{y^2}=0,\qquad z'_y=\frac{2y}{x}-\frac{x}{2y}+\frac{z}{y} \tag{39}$$

Подставляем в диф. уравнение:

$$x\left(-\frac{2y^2}{x^2}+\frac{1}{2}-y\right)+y\left(\frac{2y}{x}-\frac{x}{2y}+\frac{z}{y}\right)=z-xy, \tag{40}$$

$$-\frac{2y^2}{x}+\frac{x}{2}-xy+\frac{2y^2}{x}-\frac{x}{2}+z=z-xy, \tag{41}$$

$$-xy+z=z-xy, \tag{42}$$

и всё сходится.

(1194, 1195)