КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Р.А. ДАИШЕВ, Б.С. НИКИТИН

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. СБОРНИК ЗАДАЧ

Казань 2005

УДК 517.5

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета физического факультета
Казанского государственного университета

Рецензент — к.ф.-м.н., доцент М.П. Желифонов

Р.А. Даишев, Б.С. Никитин. Уравнения математической физики. Сборник задач. — Казань, 2005.

Данное пособие предназначено для студентов 3-го курса физического факультета. Необходимость издания данного пособия обусловлена тем, что хотя существует достаточно много задачников по уравнениям математической физики, ни одна из этих книг не соответствует в полной мере той программе, по которой изучается этот предмет на физическом факультете Казанского государственного университета. Сборник содержит 140 задач. Большинство из этих задач снабжено указаниями, а для некоторых, наиболее трудных, приведены решения. При составлении сборника были использованы книги: Ю.С. Очан, "Сборник задач по уравнениям математической физики", М., Высшая школа, 1973г., М. М. Смирнов, "Задачи по уравнениям математической физики", М. Наука, 1975г., Б. М. Будак, А. А. Самарский, А.Н. Тихонов, "Сборник задач по математической физике", М. Наука, 1980г., Н. М. Гюнтер, Р. О. Кузьмин, "Сборник задач по высшей математике. III.", М., ГИТТЛ, 1951г., И. В. Мисюркеев, "Сборник задач по математической физике", М. Просвещение, 1975г. Стиль оригинала в каждой из приведённых задач сохранен.

§1. Приведение уравнений к каноническому виду.

Для приведения к каноническому виду уравнения:

$$a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xy} + a_{22}U_{yy} + F\left(x, y, U, U_x, U_y\right) = 0, \quad U = U\left(x, y\right),$$

необходимо проинтегрировать уравнения характеристик:

$$a_{11}dy - (a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}})dx = 0,$$

$$a_{11}dy - (a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}})dx = 0$$

и найти интегралы $\psi_1(x, y) = c_1, \quad \psi_2(x, y) = c_2$. Произведя замену независимых переменных: $\xi = \psi_1(x, y), \quad \eta = \psi_2(x, y)$, $U(\xi, \eta) = U(x, y)$ в исходном уравнении, получим уравнение:

$$\tilde{a}_{11}U_{\xi\xi} + 2\tilde{a}_{12}U_{\xi\eta} + \tilde{a}_{22}U_{\eta\eta} + \tilde{F}\left(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta\right) = 0, \quad U = U\left(\xi, \eta\right).$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения.
Если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, т.е. $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$ вещественны и функционально-независимы, то $\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22} = 0$, и уравнение примет вид:

$$2\tilde{a}_{12}U_{\xi\eta} + \tilde{F}\left(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta\right) = 0.$$

Это - *каноническая форма уравнения гиперболического* типа. Часто пользуются второй канонической формой. Положив $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, придем к уравнению

$$U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} + \Phi(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta) = 0,$$

называемым *второй канонической формой* уравнений гиперболического типа.

При $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ имеется лишь один интеграл. Положим в этом случае $\xi = \psi_1(x,y), \quad \eta = \eta(x,y), \quad U(\xi,\eta) = U(x,y)$, где $\eta = \eta(x,y)$ - любая функция, независимая от $\xi = \psi_1(x,y)$. При этом обратятся в нуль следующие коэффициенты при старших производных: $\tilde{a}_{11} = 0$ и $\tilde{a}_{12} = 0$ и получим канонический вид уравнений *параболического типа*:

$$2\tilde{a}_{22}U_{\eta\eta} + \tilde{F}\,(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta) = 0,$$

к которому, в частности, принадлежит уравнение теплопроводности:

$$U_t = a^2 U_{xx}.$$

Если знак подкоренного выражения отрицателен, то интегралы уравнения характеристик будут комплексно-сопряжены и замена независимых переменных

$$\xi = \frac{1}{2}(\psi_1(x,y) + \psi_2(x,y)) = Re\ \psi_1(x,y),$$

$$\eta = \frac{1}{2}(\psi_1(x,y) - \psi_2(x,y)) = Im\ \psi_1(x,y),$$

приведет уравнение к *канонической форме уравнений эллиптического типа*:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \Phi(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta) = 0.$$

П р и м е р. Привести к каноническому виду и найти общее решение уравнения:

$$U_{xx} + 2U_{xy} - 3U_{yy} + 2U_x + 6U_y = 0.$$

Р е ш е н и е. $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 1, \quad a_{22} = -3$. Интегралы уравнений характеристик имеют вид: $x + y = c_1, \quad 3x - y = c_2$.

Делая замену $\xi = x + y, \quad \eta = 3x - y$, вычисляя производные: $U_x = U_\xi + 3U_\eta, \quad U_y = U_\xi - U_\eta, \quad U_{xx} = U_{\xi\xi} + 6U_{\xi\eta} + 9U_{\eta\eta}, \quad U_{yy} = U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \quad U_{xy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} - 3U_{\eta\eta}$ и, подставляя их в исходное уравнение, получим:

$$U_{\xi\eta} + \frac{1}{2}U_\eta = 0.$$

Это уравнение можно проинтегрировать следующим образом: запишем его в виде $\frac{\partial}{\partial\eta}[u_\xi + \frac{1}{2}U] = 0$. Это означает, что выражение, стоящее в квадратных скобках не зависит от переменной η и может зависеть лишь от ξ : $U_\xi + \frac{1}{2}U = f(\xi)$, где f произвольная функция указанного аргумента. Полученное уравнение - линейное, его решение можно записать как сумму общего решения однородного, равного $U_0 = \varphi(\eta)e^{-\frac{\xi}{2}}$, где $\varphi(\eta)$ - произвольная функция и частного решения неоднородного, которое при произвольной правой части, зависящей от ξ есть просто некоторая (произвольная) функция ξ. Таким образом, общее решение уравнения содержит две произвольные функции и имеет вид $U(\xi, \eta) = \varphi(\eta)e^{-\frac{\xi}{2}} + \phi(\xi)$, или, в переменных x, y: $U(x + y) = \varphi(3x - y)e^{-\frac{x+y}{2}} + \phi(x + y)$.

П р и м е р 2. Привести к каноническому виду уравнение:

$$U_{xx} + 4U_{xy} + 5U_{yy} + U_x + 2U_y = 0.$$

Р е ш е н и е. $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{22} = 5$. Интегралы уравнений характеристик комплексны и имеют вид: $(2x - y) \pm ix = c_{1,\,2}$. Делая замену $\xi = 2x - y, \quad \eta = x$, вычисляя производные: $U_x = 2U_\xi + U_\eta, \quad U_y = -U_\xi, \quad U_{xx} = 4U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \quad U_{yy} = U_{\xi\xi}, \quad U_{xy} = -2U_{\xi\xi} - U_{\xi\eta}$ и подставляя их в исходное уравнение, получим $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_\eta = 0$ - уравнение эллиптического типа.

Привести уравнения к каноническому виду.

1. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2\frac{\partial U}{\partial x} + 6\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
2. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} + 2\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
3. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial U}{\partial x} + \beta\frac{\partial U}{\partial y} + cU = 0.$
4. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\cos x \, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2 x)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - y\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
5. $y^2 \, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2xy \, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 2x^2 \, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + y\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
6. $tg^2 x \, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2y \, tgx \, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + y^2 \, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + tg^3 x \, \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ.

1. $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0; \qquad \xi = x + y, \quad \eta = 3x - y.$
2. $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0; \qquad \xi = 2x - y, \quad \eta = x.$
3. $\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + (\alpha + \beta)\, \frac{\partial U}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial U}{\partial \eta} + cU = 0; \qquad \xi = x + y, \quad \eta = y.$
4. $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta - \xi}{32}(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}) = 0;\ \xi = 2x + \sin x + y,\ \eta = 2x - \sin x - y.$
5. $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi - \eta}\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta}\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0;\ \ \xi = x^2 - y^2,\ \eta = x^2.$
6. $\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\eta^2}\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0;\ \ \xi = y \sin x,\ \eta = y.$

Привести уравнения к каноническому виду и найти общее решение уравнений.

7. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\sin x\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \cos^2 x\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \cos x\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
8. $x^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$
9. $x\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}) = 0, \ \ (x > 0, y > 0).$
10. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$

7. $U(x,y) = \varphi(x+y-\cos x) + \psi(x+\cos x - y)$.

8. $U(x,y) = \varphi(xy)\ln y + \psi(xy)$.

9. $U(x,y) = \varphi(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \psi(\sqrt{x}-\sqrt{y})$.

10. $U(x,y) = \varphi(x+2\sqrt{y}) + \psi(x-2\sqrt{y}) \quad$ при $\quad y > 0$.
$U(x,y) = \Gamma(x, 2\sqrt{-y}) \quad$ при $\quad y < 0 \quad$, где Γ - произвольная гармоническая функция двух переменных.

Найти решения.

11. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2\frac{\partial U}{\partial x}) = x^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$.

12. $(x-y)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0$.

13. $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} + y\frac{\partial U}{\partial x} + x\frac{\partial U}{\partial y} + xyU = 0$.

14. Найти закон колебания бесконечной струны, если начальное отклонение задается равенствами:

$$U\,(x,t)\,|_{t=0} = \begin{cases} 0, & |x| > l, \\ (l-x)/100, & 0 < l < x, \\ (l+x)/100, & -l < x < 0, \end{cases}$$

где l - заданный отрезок. Начальная скорость и внешняя возмущающая силы равны нулю.

15. Найти закон свободных колебаний бесконечной струны, если начальное отклонение во всех точках равно нулю, начальная скорость на участке $(0,\ell)$ равна $\frac{a}{100}$, а на участках $(-\infty,0)$ и $(\ell,+\infty)$ равна нулю. Здесь a - постоянная величина, фигурирующая в уравнении струны, $(0,\ell)$ - заданный отрезок.

16. Решить методом характеристик уравнение колебания бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

если в начальный момент точкам струны на участке $(-h, 0)$ была придана скорость $-\frac{a}{100}$, а на участке $(0, h)$ - скорость $+\frac{a}{100}$; в остальных точках струны начальная скорость равна нулю. Начальное отклонение равно нулю во всех точках струны.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ.

11. $U(x, y) = \frac{\varphi(x-y)+\psi(x+y)}{x}$.

У к а з а н и е: ввести новую функцию V, положив $V = xU$.

12. $U(x, y) = \frac{\varphi(x)-\psi(y)}{x-y}$.

У к а з а н и е: ввести новую функцию V, положив $V = (x-y)U$.

13. $U(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}[\varphi(x) + \psi(y)]$.

14. Если обозначить через $\varphi(x)$ функцию, заданную равенствами

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \mid x \mid \geq \ell, \\ \frac{\ell-x}{100} & 0 \leq x < \ell, \\ \frac{\ell+x}{100} & -\ell < x < 0, \end{cases}$$

то закон колебаний струны запишется следующим образом:

$U(x, t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}$.

15. Если обозначить через $\psi(z)$ функцию, определенную равенствами

$$\psi(z) = \begin{cases} 0 & z < 0, \\ \frac{z}{200} & 0 \leq z \leq \ell, \\ \frac{\ell}{200} & z > \ell, \end{cases}$$

то закон колебания струны запишется следующим образом: $U(x, t) = \psi(x + at) - \psi(x - at)$.

16. Если обозначить через $\psi(z)$ функцию, определенную равенствами

$$\psi(z) = \begin{cases} 0 & z < -h, \\ \frac{-z-h}{200} & -h \le z < 0, \\ \frac{(z-h)}{200} & 0 \le z \le h, \\ 0 & z > h, \end{cases}$$

то закон колебания струны запишется следующим образом: $U(x,t) = \psi(x+at) - \psi(x-at)$.

§2. Задача Коши.

17. Найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$U|_{y=0} = 3x^2; \qquad \frac{\partial U}{\partial y}|_{y=0} = 0.$$

18. Найти решение уравнения:

$$4y^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2(1-y^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{2y}{1+y^2}(2\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$U|_{y=0} = \varphi_0(x); \quad \frac{\partial U}{\partial y}|_{y=0} = \varphi_1(x).$$

19. Найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\cos x\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \sin^2 x\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \sin x\frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$U|_{y=\sin x} = \varphi_0(x); \quad \frac{\partial U}{\partial y}|_{y=\sin x} = \varphi_1(x).$$

20. Найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 5\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$U|_{y=0} = f(x); \quad \frac{\partial U}{\partial y}|_{y=0} = F(x).$$

21. Найти решение уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$U|_{t=0} = f(x); \quad \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = F(x).$$

22. Найти решение волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}),$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$U|_{t=0} = \varphi(r); \quad \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = \psi(r),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ - функции, заданные для всех $r \geq 0$ (случай центральной симметрии).

23. Найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

по его значениям на двух кусках характеристик: $U(x,t) = \varphi(x)$ на отрезке характеристики $t+x = 0$, и $U(x,t) = \psi(x)$ на отрезке характеристики $t - x = 0$, причем $\varphi(0) = \psi(0)$.

24. Найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

по его значениям на двух кусках характеристик: $U(x,y) = \varphi(x)$ на характеристике $x-y = 0$, и $U(x,y) = \psi(x)$ на характеристике $5x - y = 0$, причем $\varphi(0) = \psi(0)$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ.

17. $U(x,y) = 3x^2 + y^2$.

У к а з а н и е. Следует воспользоваться общим решением $U(x,y) = \varphi(x+y) + \psi(3x-y)$ данного уравнения.

18. $U(x,y) = \varphi_0(x - \frac{2}{3}y^3) + 1/2 \int\limits_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y} \varphi_1(x)dx$.

19. $U(x,y) = \frac{\varphi_0(x-\sin x+y)+\varphi_0(x+\sin x-y)}{2} + 1/2 \int\limits_{x+\sin x-y}^{x-\sin x+y} \varphi_1(z)dz$.

20. $U(x,y) = f(x+y) +$
$+ 5/6 e^{-\frac{x+y}{6}} \left[\int\limits_{x+y}^{x-y/5} e^{z/6} \left[f'(z)dz - F(z) \right] dz \right]$.

Р е ш е н и е. Интегрируя уравнения характеристик и делая замену $\xi = 5x - y, \quad \eta = x + y,$ уравнение приведем к виду $\frac{\partial}{\partial \xi}(6U_\eta + U) = 0$, откуда получим $6U_\eta + U = \phi(\eta)$, где $\phi(\eta)$ - произвольная функция. Интегрируя это уравнение аналогично методу вариации постоянной для обыкновенных линейных уравнений, получим $U(x,y) = e^{-\frac{x+y}{6}}[\alpha(x+y) + \beta(5x-y)]$, а для производной по y имеем $U_y = -\frac{1}{6}e^{-\frac{x+y}{6}}[\alpha(x+y) + \beta(5x-y)] +$

$e^{-\frac{x+y}{6}}[\alpha'(x+y)-\beta'(5x-y)]$, где штрих означает дифференцирование по аргументу, указанному в скобках. Подставляя в эти выражения значение $y=0$ и приравнивая соответствующим начальным значениям, получим систему уравнений для определения неизвестных функций α и β:

$$f(x)=U(x,0)=e^{-\frac{x}{6}}[\alpha(x)+\beta(5x)],$$

$$F(x)=U_y(x,0)=-\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}[\alpha(x)+\beta(5x)]+e^{-\frac{x}{6}}[\alpha'(x)+\beta'(5x)].$$

Дифференцируя первое из них и складывая со вторым, получим

$$\beta'(5x)=\frac{d\beta(5x)}{d5x}=\frac{1}{6}e^{\frac{x}{6}}[f'(x)-F(x)],$$

интегрируя которое, получим

$$\beta(5x)=\frac{5}{6}\int\limits_a^x e^{\frac{t}{6}}[f'(t)-F(t)]dt.$$

Здесь нижний предел, равный a, играет роль постоянной интегрирования. Заменяя $5x$ на $5x-y$, получим:

$$\beta(5x-y)=\frac{5}{6}\int\limits_a^{x-\frac{y}{5}} e^{\frac{t}{6}}[f'(t)-F(t)]dt.$$

Находим $\alpha(x)=f(x)e^{\frac{x}{6}}-\beta(5x)$, заменяем x на $x+y$ и получаем ответ.

21.

$$U(x,y)=\frac{(h-x+at)f(x-at)+(h-x-at)f(x+at)}{2(h-x)}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{h-z}{h-x}F(z)dz$$

22.

$$U(r,t) = \frac{(r-at)\varphi(r-at) + (r+at)\varphi(r+at)}{2r} + \frac{1}{2ar}\int\limits_{r-at}^{r+at} \rho\psi(\rho)d\rho$$

23.

$$U(x,y) = \varphi(\frac{x-t}{2}) + \psi(\frac{x+t}{2}) - \varphi(0).$$

Р е ш е н и е. Подставляя в общее решение уравнения $U(x,y) = \alpha(x-t) + \beta(x+t)$ значение на характеристике $x - t = 0$, получим $U(x,t)|_{t-x=o} = \psi(x) = \alpha(0) + \beta(2x)$, и на характеристике $x + t = 0$: $U(x,t)|_{t+x=o} = \varphi(x) = \alpha(2x) + \beta(0)$. При $x = 0$ из этих соотношений следует $\varphi(0) = \psi(0) = \alpha(0) + \beta(0)$. Заменяя в первом соотношении $2x \to x-t$, а во втором $2x \to x+t$, получим

$$\alpha(x-t) + \beta(0) = \varphi(\frac{x-t}{2}),$$

$$\alpha(0) + \beta(x+t) = \psi(\frac{x+t}{2}).$$

Суммируя правые и левые части этих соотношений, придем к соотношению $\alpha(x-t) + \beta(0) + \alpha(0) + \beta(x+t) = \varphi(\frac{x-t}{2}) + \psi(\frac{x+t}{2})$. Откуда

$$U(x,y) = \varphi(\frac{x-t}{2}) + \psi(\frac{x+t}{2}) - \beta(0) - \alpha(0).$$

24.

$$U(x,y) = \varphi\left(\frac{5x-y}{4}\right) + \varphi\left(\frac{y-x}{4}\right) - \varphi(0).$$

§3. Уравнения колебания с однородными граничными условиями.

25. Найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

удовлетворяющее условиям: $U|_{x=0} = 0$; $U|_{x=\ell} = 0$;
$U|_{t=0} = F(x)$; $(\frac{\partial U}{\partial t})_{|t=0} = F(x)$.

26. Найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

при граничных условиях $U|_{x=0} = 0$; $\frac{\partial U}{\partial x}|_{x=\ell} = 0$ и начальных условиях $U|_{t=0} = rx$; $\frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = 0$.

27. Найти закон колебания струны длиной ℓ, расположенной на отрезке $(0,\ell)$, если в начальный момент струне придана форма кривой $U = \frac{x(\ell-x)}{8\ell}$, а затем струна отпущена без начальной скорости. Внешние силы отсутствуют.

28. Найти закон колебания струны длины ℓ, если в начальный момент всем точкам струны сообщена скорость, равная $\frac{a}{10}$ (где a - постоянная, фигурирующая в уравнении уравнении струны). Начальное отклонение отсутствует. Концы струны закреплены. Внешние силы отсутствуют.

29. Однородная струна длиной ℓ натянута между точками $x = 0$ и $x = \ell$. В точке $x = c$ струна оттягивается на небольшое расстояние h от положения равновесия и в момент $(t = 0)$ отпускается без начальной скорости. Определить отклонение $U(x,t)$ струны для любого момента времени.

30. Найти закон свободных колебаний струны, расположенной на отрезке $(0, \ell)$, если в начальный момент струне была придана форма кривой $U = \frac{\ell}{100} \sin \frac{\pi x}{2\ell}$ и затем струна отпущена без начальной скорости. Струна закреплена на левом конце, а правый может свободно перемещаться так, что касательная в правом конце все время остается горизонтальной.

31. Однородная струна длиной ℓ, закрепленная на обоих концах, находится в прямолинейном положении равновесия. В некоторый момент времени, принимаемый за начальный, она получает в точке $x = c$ удар молоточка, который сообщает этой точке постоянную скорость V_0. Найти отклонение $U(x,t)$ струны для любого момента времени.

Рассмотреть два случая:

а) Струна возбуждается начальной скоростью

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} v_0, & \mid x - c \mid < \frac{\pi}{2h} \\ 0, & \mid x - c \mid > \frac{\pi}{2h} \end{cases}.$$

Этот случай соответствует плоскому жесткому молоточку, имеющему ширину π/h и ударяющему в точке $x = c$.

б) Струна возбуждается начальной скоростью

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \begin{cases} v_0 \cos h(x - c), & \mid x - c \mid < \frac{\pi}{2h} \\ 0, & \mid x - c \mid > \frac{\pi}{2h} \end{cases}.$$

Этот случай соответствует жесткому выпуклому молоточку шириной $\frac{\pi}{h}$. Такой молоточек в центре интервала возбуждает наибольшую скорость.

25.

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left[\frac{l}{an\pi} \sin \frac{a\pi n}{l} t + \cos \frac{a\pi n}{l} t \right] \sin \frac{\pi n x}{l},$$

где

$$\beta_n = \frac{2}{l} \int_o^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

26.

$$U(x,t) = \frac{2rl}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{a\pi n t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

27.

$$U(x,t) = \frac{l}{\pi^3} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{a\pi t}{l}}{1^3} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3a\pi t}{l}}{3^3} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l} \cos \frac{5a\pi t}{l}}{5^3} + ... \right].$$

28.

$$U(x,t) = \frac{2l}{5\pi^2} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{a\pi t}{l}}{1^2} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{3a\pi t}{l}}{3^2} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l} \sin \frac{5a\pi t}{l}}{5^2} + ... \right].$$

29.

$$U(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} sin \frac{\pi n c}{l} sin \frac{\pi n x}{l} cos \frac{a\pi n t}{l}.$$

У к а з а н и е. Начальные условия нужно взять в виде:

$$U(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{c} x, & 0 \le x \le c, \\ \frac{h(x-l)}{c-l}, & c \le x \le l, \end{cases} \qquad \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

30.

$$U(x,t) = \frac{l}{100} \sin \frac{\pi x}{2l} \cos \frac{a\pi t}{2l}.$$

31.

$$a) \quad U(x,t) = \frac{4v_0 l}{a\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{\pi nc}{l} \sin\frac{\pi^2 n}{2hl} \sin\frac{a\pi nt}{l} \sin\frac{\pi nx}{l}.$$

$$b) \qquad U(x,t) = \frac{4v_0 h}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi nc}{l} \cos\frac{\pi^2 n}{2hl}}{n(h^2 - \frac{n^2\pi^2}{l^2})} \sin\frac{a\pi nt}{l} sin\frac{\pi nx}{l}.$$

§4. Уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями.

Во всех последующих задачах, связанных с теплопроводностью стержня, предполагается, что он однороден, изотропен и что его стенки теплоизолированы от окружающей среды, если специально не оговорено противное.

32. Найти распределение температуры в стержне $0 \le x \le \ell$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура равна $f(x)$. Рассмотреть частный случай, когда $f(x) \equiv U_0 = const$.

33. Найти закон распределения температуры внутри стержня длины ℓ, лежащего на отрезке$(0,\ell)$, если в начальный момент температура внутри стержня была распределена следующим образом:

$$U(x,t)|_{t=0} = \begin{cases} \frac{x}{\ell}U_0, & 0 < x < \ell/2, \\ \frac{\ell - x}{\ell}U_0, & \frac{\ell}{2} < x < \ell, \end{cases}$$

где $U_0 = const$. На концах стержня поддерживается нулевая температура. Теплообмен свободный.

34. Дан тонкий однородный стержень длиной ℓ, изолированный от внешнего пространства, начальная температура которого равна $f(x) = \frac{cx(\ell-x)}{\ell^2}$. Концы стержня поддерживаются при нулевой температуре. Определить температуру стержня в момент времени $t > 0$.

35. Найти закон распределения температуры внутри стержня при свободном теплообмене, если на левом конце стержня $(x = 0)$ поддерживается постоянная температура $U = 0$, а правый конец стержня $(x = \ell)$ теплоизолирован от окружающей среды (т.е. $U'_x(x,t)|_{x=0} = 0$). Начальная температура стержня задается функцией: $U(x,t)|_{t=0} = f(x)$.

36. Найти закон остывания однородного стержня длины ℓ, если на левом конце стержня $(x = 0)$ поддерживается постоянная температура $U = 0$, а правый конец стержня $(x = \ell)$ теплоизолирован. Начальная температура точек стержня задается равенствами:

$$U(x,t)|_{t=0} = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{\ell}{2}, \\ U_0, & \frac{\ell}{2} < x < \ell. \end{cases}$$

Теплообмен свободный.

37. Найти температуру стержня $0 \le x \le \ell$ с теплоизолированной поверхностью и теплоизолированными концами, если начальная температура является произвольной функцией x.

38. Дан однородный шар радиуса R, центр которого расположен в начале координат. Известно, что начальная температура любой точки шара зависит только от расстояния r этой точки от центра шара. Во все время наблюдения внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре. Опреде-

лить температуру любой точки внутри сферы в любой момент времени $t > 0$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ.

32. Решением краевой задачи

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty,$$

$$U(0,t) = U(l,t) = 0, \qquad 0 < t < \infty,$$

$$U(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < l,$$

является

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2}t} \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Если $f(x) = U_0 = const$, то

$$U(x,t) = \frac{4U_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{-\frac{a^2\pi^2(2k+1)^2}{l^2}t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

33.

$$U(x,t) = \frac{4U_0}{\pi^2}\left[\frac{e^{-\frac{\pi^2 a^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi x}{l}}{1^2} - \frac{e^{-\frac{3^2\pi^2 a^2}{l^2}t}\sin\frac{3\pi x}{l}}{3^2} + \frac{e^{-\frac{5^2\pi^2 a^2}{l^2}t}\sin\frac{5\pi x}{l}}{5^2} - ...\right].$$

34.

$$U(x,t) = \frac{8c}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{l^2}t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

35.

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2l},$$

$$A_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2l}dx.$$

36.

$$U(x,t)=\frac{4U_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi(2k-1)}{4}}{2k-1}e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$$

37.

$$U(x,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

38.

$$U(r,t)=\frac{2}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{R^2}t}\sin\frac{n\pi r}{R}\int\limits_0^R\rho f(\rho)\cos\frac{n\pi\rho}{R}d\rho.$$

У к а з а н и е. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2},$$

где $v=rU,\quad a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}},$ при условиях:

$$v\left(0,t\right)=0,\quad v\left(R,t\right)=0,\quad v\left(r,0\right)=rf\left(r\right).$$

§6. Неоднородные уравнения колебаний и теплопроводности или задачи с неоднородными граничными условиями.

39. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + x(x-l)t^2$$

при нулевых начальных условиях и условиях на границах:

$$U(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0.$$

40. Решить уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2h\frac{\partial U}{\partial t} - b^2 U = 0$$

при нулевых начальных и граничных условиях:

$$U(0,t) = A, \quad U(l,t) = 0.$$

41. На струну длины ℓ постоянно действует внешняя возмущающая сила, плотность которой (в расчете на единицу массы струны) равна $\frac{a^2}{10\ell}\sin\omega t$; здесь a -постоянная, фигурирующая в уравнении струны, ω - положительное число, отличное от чисел вида $\frac{ka\pi}{\ell}, (k = 1, 2, 3, \ldots)$. Найти закон колебания струны, если начальное отклонение и начальная скорость равны нулю, а концы струны закреплены.

42. Найти продольные колебания стержня $0 \le x \le \ell$, если один конец стержня закреплен жестко, а к концу $x = \ell$, начиная

с момента $t=0$, приложена сила $F(t)=A\sin\omega t, (0\leq t<\infty)$. Колебания происходят в среде с сопротивлением, пропорциональном скорости.

43. Однородная струна длиной ℓ натянута между точками $x=0$ и $x=\ell$. В точке $x=x_0$ струна оттягивается на небольшое расстояние h от положения равновесия и в момент t отпускается без начальной скорости. Определить отклонение $U(x,t)$ струны для любого момента времени при условии, что колебания происходят в поле силы тяжести в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, а концы струны закреплены на одинаковой высоте.

44. Найти закон колебания струны с жёстко закрепленными концами $x=0,\ x=\ell$, при условии, что среда, в которой колеблется струна, оказывает сопротивление, пропорциональное первой степени скорости. Начальное отклонение и начальная скорость струны задаётся в виде: $U(x,t)|_{t=0}=f(x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0}=F(x)$.

45. Найти закон распределения температуры внутри стержня длины ℓ, если в начальный момент температура внутри стержня во всех точках равнялась 0^0, в левом конце поддерживается всё время постоянная температура m_1, а в правом - постоянная температура m_2. Теплообмен свободный.

46. Найти закон распределения температуры внутри стержня длины ℓ, расположенного на отрезке $[\ 0,\ \ \ell\ ]$, если в начальный момент температура внутри стержня равнялась нулю, в правом конце температура поддерживается все время равной нулю, а в левом изменяется по закону $U(0,t)=U_0\cos\omega t$, (где U_0,ω - заданные числа). Теплообмен несвободный: внутри стержня имеются источники и поглотители тепла. Их интенсив-

ность (в расчете на единицу массы стержня) равна $U_0\omega\frac{\ell-x}{\ell}\sin\omega t$.

47. Найти закон изменения температуры в однородном изотропном стержне длины ℓ при свободном теплообмене, если начальная температура этого стержня задана равенством $U(x,0) = \varphi(x)$. Левый конец этого стержня теплоизолирован, а в правом поддерживается постоянная температура $U(l,t) = U_0 > 0$. Рассмотреть, в частности, случай, когда $\varphi(x) = U_0\,\frac{x^2}{l^2}$.

48. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} + 6U - 3\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0,$$

удовлетворяющее граничным условиям: $U(0,t) = 1,\ U(2,t) = 2$ и начальному условию: $U(x,0) = x^2 - \frac{3}{2}x + 1$.

49. Найти распределение температуры в однородном шаре радиуса R. Внутри шара, начиная с момента времени $t = 0$, действует источник тепла с постоянной плотностью Q, а поверхность поддерживается при температуре, равной нулю. Начальная температура равна нулю.

50. Однородное твердое тело ограничено концентрическими сферами с радиусами R и $2R$. Внутренняя поверхность тела непроницаема для тепла. Шаровой слой нагрет до температуры U_0 и затем охлаждается в среде с нулевой температурой. Найти температуру в точках внутри шарового слоя в момент времени $(t > 0.)$

39.
$$U(x,t) = -\frac{8l^4t^2}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l} +$$
$$+\frac{16l^6}{\pi^7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^7}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l} -$$
$$-\frac{16l^6}{\pi^7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^7}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

40.
$$U(x,t) = A\frac{\sinh b(l-x)}{\sinh bl} -$$
$$-2Ae^{-\mu t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\pi}{b^2l^2+k^2\pi^2}\left(\cosh n_k t + \frac{\mu}{n_k}\sinh n_k t\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$
где
$$\mu = \frac{h}{a^2}, \quad n_k = \frac{1}{a^2 l}\sqrt{h^2l^2 - a^2(b^2l^2+k^2\pi^2)}.$$

41.
$$U(x,t) = -\frac{0,4a^2\omega}{\pi l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)\left(\omega^2 - \frac{(2n+1)^2a^2\pi^2}{l^2}\right)}\times$$
$$\times\left(\frac{\sin\omega t}{\omega} - \frac{\sin\frac{(2n+1)a\pi t}{l}}{\frac{(2n+1)a\pi}{l}}\right).$$

42. Решением краевой задачи
$$U_{tt} = a^2U_{xx} - 2\nu U_t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty,$$
$U(0,t) = 0$, $0 < t < \infty$, $U_x(l,t) = \frac{A}{ES}\sin\omega t$, $U(x,0) = U_t(x,0) = 0$, $0 < x < l$, является $U(x,t) = u(x,t) +$
$$+e^{-\nu t}\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l} + b_n\sin\frac{(2n+1)\pi at}{l}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

$$a_n = -\frac{2}{l}\int\limits_0^l u(z,0)\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2l}dz,$$

$$b_n = -\frac{4\nu}{(2n+1)\pi a}\int\limits_0^l u_t(z,0)\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2l}dz.$$

Установившиеся колебания определяются формулой

$$u(x,t) = Im\left\{\frac{A(\alpha - i\beta)}{ES(\alpha^2+\beta^2)}\frac{e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{-(\alpha+i\beta)x}}{e^{(\alpha+i\beta)l} - e^{-(\alpha+i\beta)e^{i\omega t}}}\right\},$$

где

$$\alpha + i\beta = \frac{\sqrt{\omega^2 - 2\nu\omega i}}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\sqrt{\omega^4+4\nu^2\omega^2}+\omega^2}{2}} -$$

$$-\frac{i}{a}\sqrt{\frac{\sqrt{\omega^4+4\nu^2\omega^2}-\omega^2}{2}}.$$

43. Р е ш е н и е. Имеем краевую задачу

$$U_{tt} = a^2U_{xx} - 2\nu U_t + g, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \qquad (1)$$

$$U(0,t) = U(l,t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \quad U_t(x,0) = 0.$$

$$U(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{x_0}x, & 0 < x < x_0; \\ \frac{h(l-x)}{l-x_0}, & x_0 < x < l. \end{cases}$$

Ищем сначала стационарное решение $w(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $w(0) = w(l) = 0$. Подставляя w в (1), получим

$$0 = a^2\frac{d^2w}{dx^2} + g, \quad 0 < x < l,$$

откуда

$$w(x) = -\frac{g}{2a^2}x^2 + C_1x + C_2.$$

Из граничных условий находим:

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{gl}{2a^2}.$$

Остается решить краевую задачу

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} - 2\nu v_t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty,$$

$$v(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{x_0}x + \frac{g}{2a^2}(x^2 - lx), & 0 < x < x_0; \\ \frac{h(l-x)}{l-x_0} + \frac{g}{2a^2}(x^2 - lx), & x_0 < x < l; \end{cases}$$

$$v_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < x_0.$$

Получим:

$$U(x,t) = -\frac{g}{2a^2}(x^2 - lx) +$$

$$+\frac{2l^2}{\pi^2}e^{-\nu t}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{h\sin\frac{\pi n x_0}{l}}{n^2 x_0(l-x)} + \frac{g\left[-1+(-1)^n\right]}{\pi n^3 a^2}\right\}\cdot$$

$$\cdot\left(\cos\omega_n t + \frac{\nu}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

44. $$U(x,t) = e^{-ht}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos q_k t + b_k \sin q_k)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где

$$q_k = \sqrt{\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2} - h^2}; \qquad a_k = \int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx;$$

$$b_k = \frac{h}{q_k}a_k + \frac{2}{lq_k}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

45.

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\left[-m_1 + (-1)^k m_2\right]e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{k\pi x}{l} + \\ &+ m_1 + (m_2 - m_1)\frac{x}{l}. \end{aligned}$$

46.

$$U(x,t) = U_0\left(1 - \frac{x}{l}\right)\cos\omega t - \frac{2U_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

47. Р е ш е н и е задачи $U_t = a^2U_{xx}$ с начальными условиями $U(x,t)|_{t=0} = \varphi(x)$ и неоднородными граничными условиями $U_x(0,t) = 0, \quad U(l,t) = U_0 > 0$ сводится к решению задачи с однородными граничными условиями, если сделать замену $v(x,t) = U(x,t) - u(x,t)$, где $u(x,t)$ - любая функция, удовлетворяющая граничному условию. В частности, можно взять $U(x,t) = \frac{U_0x^2}{l}$, так,что замена имеет вид $v(x,t) = U(x,t) - \frac{U_0x^2}{l}$. Функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению:

$$v_t = a^2v_{xx} + \frac{2U_0a^2}{l^2}$$

с начальным условием $v(x,t)|_{t=0} = \varphi(x) - \frac{2U_0x^2}{l^2}$ и однородным граничным условиям $v_x(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0$. Находим систему собственных функций однородного уравнения, удовлетворяющих однородным граничным условиям. Решая однородное уравнение методом разделения переменных $v(x,t) = X(x)T(t)$, получим для определения $X(x)$:

$$X''(x) + \lambda^2X(x) = 0.$$

Нетривиальное решение получим при $C_1 \neq 0, C_2 = 0, \lambda = \frac{(2k-1)\pi}{2l}$, а собственные функции имеют вид: $X_k = \cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}, (k = 1, 2, ...)$. Функцию v ищем в виде ряда: $v(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(t)\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}$. Подставляя это выражение в исходное уравнение для v, разлагая неоднородный член в ряд Фурье по той же системе функций и приравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях, получим для определения $b_k(t)$ уравнение:

$$b'_k(t) = -\frac{(2k-1)^2\pi^2 a^2}{4l^2} b_k(t) + (-1)^{k-1}\frac{8U_0 a^2}{(2k-1)\pi l^2}$$

с начальными условиями

$$b_k(0) = \frac{2}{l}\int\limits_0^\infty \left[\varphi(x) - \frac{U_0 x^2}{l}\right]\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}dx.$$

Определяя b_k и подставляя в выражение для v, найдем

$$U(x,t) = \frac{U_0 x^2}{l^2} + \sum_{k=1}^\infty \left[c_k e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2 a^2}{4l^2}t} + \frac{32U_0(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3\pi^3}\right]\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l},$$

где

$$c_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \left[\varphi(x) - \frac{U_0 x^2}{l}\right]\cos\frac{(2k-1)\pi n x}{2l}dx + \frac{32U_0(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3\pi^3}.$$

При $\varphi = \frac{U_0 x^2}{l}$ имеем:

$$U(x,t) = \frac{U_0 x^2}{l^2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{32U_0(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3\pi^3}\left[1 - e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2 a^2}{4l^2}t}\right]\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$$

48.

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^\infty \left\{-\frac{16(1-2\cos k\pi)}{k\pi(k^2\pi^2+8)}\left[1 - e^{-\frac{3}{4}(k^2\pi^2+8)t}\right] - \right.$$

$$\left. -\frac{16(1-\cos k\pi)}{k^3\pi^3} e^{-\frac{3}{4}(k^2\pi^2+8)t}\right\}\sin\frac{k\pi x}{2} + 1 + \frac{x}{2}.$$

У к а з а н и е. Делая замену $v(x,t) = U(x,t) - \left(1+\frac{x}{2}\right)$, свести задачу к следующей: найти решение уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 6v - 3\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -6 - 3x,$$

удовлетворяющее граничным условиям $v(0,t) = v(2,t) = 0$ и начальному условию $v(x,t)|_{t=0} = x^2 - 2x$.

49.

$$U(r,t) = \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{2QR^3}{kr\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}e^{-\frac{n^2a^2\pi^2}{R^2}t}\sin\frac{n\pi r}{R}.$$

У к а з а н и е. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{Q}{c\rho}$$

с начальным условием $U(r,t)|_{t=0} = 0$, и с граничными условиями $U(R,t) = 0$, $\quad U(r,t)|_{r=0}$ - конечно, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$.

50.

$$U(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{R\lambda_k\cos\lambda_k(r-R) + \sin\lambda_k(r-R)}{r}e^{-\lambda_k^2a^2t},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...$-положительные корни уравнения

$$(1 - 2Rh + 2\lambda^2R^2)\sin\lambda R = (1+2Rh)R\lambda\cos\lambda R,$$

$$A_k = \frac{3R^3\lambda_k^2(1+2Rh)U_0}{(1+R^2\lambda_k^2)[(1+2Rh)R^2\lambda_k^2 + (2Rh + 2R^2\lambda_k^2 - 1)\sin^2\lambda_k R]}.$$

У к а з а н и е. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right)$$

при условиях

$$\frac{\partial U}{\partial r}|_{r=R} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial r} + hU|_{r=2R} = 0, \quad U(r,0) = U_0.$$

§6. Уравнения колебания и теплопроводности для прямоугольных областей.

51. Найти закон свободных колебаний квадратной мембраны со стороной ℓ, если в начальный момент мембране придана скорость $U_t(x,y,t)|_{t=0} = \frac{a}{50}$, (где a - постоянная, фигурирующая в уравнении мембраны). Начальное отклонение равно нулю. Мембрана закреплена в точках своего контура.

52. Найти закон свободных колебаний квадратной мембраны со стороной ℓ, если в начальный момент отклонение в каждой точке определялось равенством: $U(x,y,t)|_{t=0} = \frac{\ell}{100}\sin\frac{\pi x}{\ell}\sin\frac{\pi y}{\ell}$. Начальная скорость равна нулю. Вдоль контура мембрана закреплена.

53. Найти закон свободных колебаний однородной прямоугольной мембраны ($0 \leq x \leq \ell$; $0 \leq y \leq m$), если граничные условия таковы: $U(x,y,t)|_{x=0} = 0$; $U(x,y,t)|_{x=\ell} = 0$; $U(x,y,t)|_{y=0} = h\sin\frac{\pi x}{\ell}$; $U(x,y,t)|_{y=m} = h\sin\frac{\pi x}{\ell}$. В начальный момент $t = 0$ мембрана имела форму $U(x,y,0) = h\sin\frac{\pi x}{\ell}$, а скорость всех её точек была равна $v_0\sin\frac{\pi x}{\ell}$.

54. Тонкая пленка натянута на проволочный каркас, проектирующееся на плоскости ($0\ x\ y$) в прямоугольник со сторонами $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = m$; отклонение точек контура от плоскости ($0\ x\ y$) задается равенствами: $U(x,y)|_{x=0} = 0$; $U(x,y)|_{x=\ell} = 0$; $U(x,y)|_{y=0} = \varphi(x)$; $U(x,y)|_{y=m} = \psi(x)$. Найти форму поверхности, по которой расположится пленка. Решить задачу в том случае, когда $\varphi(x) = 0$; $\psi(x) = h\sin\frac{\pi x}{\ell}$.

55. Тонкая пленка натянута на проволочный каркас, проектирующееся на плоскости ($0\ x\ y$) в прямоугольник со сторо-

нами $x = 0$, $x = \ell$, $y = 0$, $y = m$. Отклонение точек контура от плоскости $(x\ 0\ y)$ задается равенствами: $U(x, y)_{x=0} = f(y)$; $U(x, y)|_{x=\ell} = g(y)$; $U(x, y)|_{y=0} = \varphi(x)$; $U(x, y)|_{y=m} = \psi(x)$. Найти форму поверхности, по которой расположится пленка. Решить задачу в случае, если отклонение пленки от плоскости $(O\ x\ y)$ в точках контура задается равенствами: $U(0, y) = 0$, $U(\ell, y) = \frac{hy}{m}$, $U(x, 0) = 0$; $U(x, m) = \frac{hx}{\ell}$.

56. Координаты точек однородного и изотропного параллелепипеда D удовлетворяют неравенствам: $0 \leq x \leq \ell_1$; $0 \leq y \leq \ell_2$; $0 \leq z \leq \ell_3$. Найти закон изменения температуры внутри этого параллелепипеда, если начальная температура точек, лежащих внутри параллелепипеда, определяется равенством: $U(x, y, z, t)|_{t=0} = f(x, y, z)$, (где f - заданная функция, определенная внутри параллелепипеда). На поверхности параллелепипеда поддерживается постоянная нулевая температура.

57. Координаты точек однородного и изотропного параллелепипеда D удовлетворяют неравенствам: $0 \leq x \leq \ell_1$; $0 \leq y \leq \ell_2$; $0 \leq z \leq \ell_3$. Найти закон изменения температуры внутри параллелепипеда D, если этод параллелепипед изолирован в тепловом отношении от окружающей среды и если начальная температура точек, лежащих внутри параллелепипеда, определяется равенством $U(x, y, z, t)|_{t=0} = f(x, y, z)$, где $f(x, y, z)$ - функция, заданная внутри D.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ.

51.

$$U(x, y, t) = \sum \frac{0.32l}{\pi^3 ik\sqrt{i^2 + k^2}} \sin \frac{\pi a\sqrt{i^2 + k^2}}{l} t \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{l},$$

где суммирование проводится по всем парам нечетных номеров $i > 0, k > 0$: $(1,1), (1,3), (3,1), \ldots$ 52.

$$U(x,y,t) = \frac{l}{100}\cos\frac{a\pi\sqrt{2}}{l}t\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}.$$

53. Р е ш е н и е. Искомая функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right).$$

Сделаем замену переменной: $w = U - h\sin\frac{\pi x}{l}$. Тогда новая неизвестная функция удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\pi^2 h}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}\right),$$

однородным граничным условиям $w(x,y,t)|_{x=0} = w(x,y,t)|_{x=l} = w(x,y,t)|_{y=0} = w(x,y,t)|_{y=m} = 0$, и неоднородным начальным: $w(x,y,t)|_{t=0} = 0, w'_t(x,y,t)|_{t=0} = v_0\sin\frac{\pi x}{l}$. Находим собственные функции однородного уравнения:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

удовлетворяющих однородным граничным условиям

$$\varphi_{i,k} = \sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{k\pi y}{m}$$

и будем искать решение неоднородного уравнения в виде суммы ряда по этим функциям:

$$w(x,y,t) = \sum_{i,k}\beta_{i,k}(t)\varphi_{i,k} = \sum_{i,k}\beta_{i,k}(t)\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{k\pi y}{m}.$$

Разложим функцию $-\frac{\pi^2 h}{l}\sin\frac{\pi x}{l}$ в двойной ряд Фурье по синусам:

$$-\frac{\pi^2 h}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}=\sum_{i,k}c_{i,k}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{k\pi y}{m},$$

где

$$c_{i,k}=\begin{cases}0 & i>1 \quad \text{(k-любое)}\\ -\frac{4\pi h}{l} & i=1 \quad \text{(k-нечетно)}\\ 0 & i=1 \quad \text{k-четное)}\end{cases}.$$

Подставляя w и этот ряд в неоднородное уравнение , получим уравнение для определения $\beta(t)$:

$$\beta_{i,k}''(t)=-a^2\left(\frac{i^2\pi^2}{l^2}+\frac{k^2\pi^2}{m^2}\right)\beta_{i,k}(t)+a^2c_{i,k}(t)$$

с начальными условиями

$$\beta_{i,k}(0)=0.$$

Решая эти уравнения, найдем, что при $i>1$ (k-любое), а также при $i=1$ (к-четное)

$$\beta_{i,k}=0.$$

Если же $i=1$, к - нечетное, то для $\beta_{1,k}$ уравнение сводится к

$$\beta_{1,k}''(t)+a^2\pi^2\left(\frac{1}{l^2}+\frac{k^2}{m^2}\right)\beta_{1,k}(t)=-\frac{4\pi h a^2}{kl^2},$$

а начальные условия принимают вид: $\beta_{i,k}(0)=0, \quad \beta_{1,k}'(0)=$ $=\frac{4v_0}{k\pi}$. В этом случае

$$\beta_{1,k}(t)=\frac{4V_0}{ak\pi^2\sqrt{\frac{1}{l^2}+\frac{k^2}{m^2}}}\sin a\pi t\sqrt{\frac{1}{l^2}+\frac{k^2}{m^2}}-$$

$$-\frac{4h}{\pi k l^2\left(\frac{1}{l^2}+\frac{k^2}{m^2}\right)}\left(1-\cos a\pi t\sqrt{\frac{1}{l^2}+\frac{k^2}{m^2}}\right).$$

Подставляя найденные значения коэффициентов β и учитывая связь между U и w, получим:

$$U(x,y,t)=h\sin\frac{\pi x}{l}+\sum\left[\frac{4V_0}{ak\pi^2\sqrt{\frac{1}{l^2}+\frac{k^2}{m^2}}}\sin a\pi t\sqrt{\frac{1}{l^2}+\frac{k^2}{m^2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{4h}{k\pi l^2(\frac{1}{l^2}+\frac{k^2}{m^2})}(1-\cos a\pi t\sqrt{\frac{1}{l^2}+\frac{k^2}{m^2}}\ )\right]\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{k\pi y}{m},$$

где суммирование проводится по всем нечетным $k>0$.

54.

$$U(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k e^{\frac{k\pi y}{l}}+B_k e^{-\frac{k\pi y}{l}}\right]\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где $A_k=\frac{1}{l\cdot sh\frac{k\pi m}{l}}\int\limits_0^l\left[\psi(x)-e^{-\frac{k\pi m}{l}}\varphi(x)\right]\sin\frac{k\pi x}{l}dx,$

$$B_k=\frac{1}{l\cdot sh\frac{k\pi m}{l}}\int\limits_0^l\left[e^{\frac{k\pi m}{l}}\varphi(x)-\psi(x)\right]\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

$$U(x,y)=\frac{h}{sh\frac{\pi m}{l}}sh\frac{\pi y}{l}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

55. Решение ищем в виде суммы двух функций:

$$U(x,y)=v(x,y)+w(x,y),$$

где $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению $v_{xx}+v_{yy}=0$ с граничными условиями

$$v(0,y)=v(l,y)=0,\quad v(x,0)=\varphi(x),\quad v(x,m)=\psi(x),$$

а $w(x,y)$ - такому же уравнению и граничным условиям $w(0,y) = f(y)$; $\quad w(l,y) = g(y)$; $\quad w(x,0) = w(x,m) = 0$. Получим

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k e^{\frac{k\pi y}{l}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{l}}\right] \sin\frac{k\pi x}{l},$$

где

$$A_k = \tfrac{1}{l \cdot sh\frac{k\pi m}{l}} \int\limits_0^l \left[\psi(x) - e^{-\frac{k\pi m}{l}}\varphi(x)\right] \sin\tfrac{k\pi x}{l} dx,$$

$$B_k = \frac{1}{l \cdot sh\frac{k\pi m}{l}} \int\limits_0^l \left[-\psi(x) + e^{\frac{k\pi m}{l}}\varphi(x)\right] \sin\frac{k\pi x}{l} dx,$$

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k e^{\frac{k\pi x}{l}} + D_k e^{-\frac{k\pi x}{l}}\right] \sin\frac{\pi k y}{m}.$$

Здесь $\quad C_k = \tfrac{1}{m \cdot sh\frac{k\pi l}{m}} \int\limits_0^l \left[g(y) - e^{-\frac{k\pi l}{m}} f(y)\right] \sin\tfrac{k\pi y}{l} dy,$

$$D_k = \frac{1}{m \cdot sh\frac{k\pi l}{m}} \int\limits_0^l \left[-g(y) + e^{\frac{k\pi l}{m}} f(y)\right] sin\frac{k\pi y}{l} dy.$$

$$U(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2h}{k\pi} \left[\frac{sh\frac{k\pi y}{l} \sin\frac{k\pi x}{l}}{sh\frac{k\pi m}{l}} + \frac{sh\frac{k\pi x}{m} \sin\frac{k\pi y}{m}}{sh\frac{k\pi l}{m}}\right].$$

56.

$$U(x,y,z,t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{kmn} e^{-\pi^2 a^2 \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{n^2}{l_3^2}\right) t} \sin\frac{k\pi x}{l_1} \sin\frac{m\pi y}{l_2} \sin\frac{n\pi z}{l_3},$$

где

$$B_{kmn} = \frac{8}{l_1 l_2 l_3} \iiint\limits_D f(x,y,z) \sin\frac{k\pi x}{l_1} \sin\frac{m\pi y}{l_2} \sin\frac{n\pi z}{l_3} dxdydz.$$

57. Задача сводится к тому, чтобы найти то решение уравнения

$$U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}),$$

которое удовлетворяет начальному условию

$$U(x, y, z)|_{t=0} = f(x, y, z)$$

и граничному условию

$$\frac{\partial U}{\partial n}|_S = 0,$$

где S - поверхность параллелепипеда. Это граничное условие равносильно системе следующих граничных условий:

$$U'_x(0, y.z, t) = U'_x(l_1, y, z, t) = U'_y(x, 0, z, t) = U'_y(x, l_2, z, t) =$$
$$= U'_z(x, y, 0, t) = U'_z(x, y, l_3, t) = 0.$$

Искомым решением будет

$$U(x, y, z, t) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{kmn} e^{-\pi^2 a^2 \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{n^2}{l_3^2}\right) t} \sin\frac{k\pi x}{l_1} \sin\frac{m\pi y}{l_2} \sin\frac{n\pi z}{l_3},$$

где

$$A_{kmn} = \frac{G_{kmn}}{l_1 l_2 l_3} \iiint\limits_D f(x, y, z) \cos\frac{k\pi x}{l_1} \cos\frac{m\pi y}{l_2} \cos\frac{n\pi z}{l_3} dxdydz.$$

Здесь

$$G_{kmn} = \begin{cases} 8, & k \neq 0,\ m \neq 0,\ n \neq 0 \\ 4, \quad k = 0,\ m \neq 0,\ n \neq 0 & \text{и круговая подстановка индексов,} \\ 2, \quad k = 0,\ m = 0,\ n \neq 0 & \text{и круговая подстановка индексов,} \\ 1, \quad k = 0,\ m = 0,\ n = 0 & \text{и круговая подстановка индексов.} \end{cases}$$

§7. Задача Дирихле.

58. Написать решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа внутри круга.

59. Написать решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа вне круга.

60. Найти решение а) внутренней и б) внешней краевых задач для уравнения Лапласа, если на границе круга заданы условия:

$$1)U|_{\rho=a} = A\sin\varphi; \quad 2)U|_{\rho=a} = A\sin^3\varphi + B;$$

$$3)U|_{\rho=a} = \begin{cases} A\sin\varphi, & 0 < \varphi < \pi; \\ 1/3A\sin^3\varphi, & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

61. Написать решение второй краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta U = 0$ а) внутри, б) вне круга.

62. а) Написать решение третьей внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в круге, если граничное условие записывается в виде $\frac{\partial U}{\partial \rho} - hU = -f$ при $\rho = a$.

б) Найти так же решение третьей внешней краевой задачи для круга.

63. Решить уравнение Лапласа $\Delta U = 0$ в плоской области, ограниченной двумя концентрическими окружностями радиусов ℓ и L $(\ell < L)$, если заданы следующие граничные условия: $U(r,\varphi)|_{r=\ell} = f(\varphi)$; $U(r,\varphi)|_{r=L} = F(\varphi)$.

Рассмотреть, в частности, случай, когда $f(\varphi)$ и $F(\varphi)$ - постоянны: $(f(\varphi) \equiv A, F(\varphi) \equiv B)$

64. Найти решение уравнения Лапласа в круге $x^2 + y^2 < R^2$ при краевом условии $\frac{\partial U}{\partial r}|_{r=R} = \psi(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi$.

65. На границе тонкой пластинки в форме кругового сектора $\rho \le a; \quad 0 \le \varphi \le \alpha$ задана температура
$$U = \begin{cases} f(\varphi), \text{ если } \quad \rho = a; \\ \quad 0, \text{ если } \ \varphi = 0 \text{ или } \varphi = \alpha. \end{cases}$$
Найти стационарное термическое поле в пластинке. Рассмотреть частный случай:
$$f(\varphi) = \begin{cases} U_1, & 0 < \varphi < \frac{\alpha}{2}; \\ U_2, & \frac{\alpha}{2} < \varphi < \alpha. \end{cases}$$

66. Найти стационарное распределение температуры в тонкой пластинке, имеющей форму кругового сектора, радиусы которого поддерживаются при температуре U_1, а дуга окружности при температуре U_2.

67. Решить уравнение Лапласа внутри кольцевого сектора, ограниченного дугами окружностей $\rho = a, \rho = b$, и радиусами $\varphi = 0, \varphi = \alpha$, если заданы следующие условия на границах: $U = 0$ при $\varphi = 0, \quad \varphi = \alpha, \quad U = f(\varphi)$ при $\rho = 0; \quad U = F(\varphi)$ при $\rho = b$. Рассмотреть предельные случаи: $a \to 0; b \to \infty$; $\alpha = \pi$.

68. Дан однородный изотропный шар, центр которого находится в начале координат; радиус шара ℓ. Известно, что начальная температура любой части шара зависит только от расстояния r этой точки от начала координат и равна $f(r)$. На поверхности шара поддерживается постоянная температура 0. Найти закон остывания шара. Рассмотреть частный случай, когда $f(r) = U_0 = const \neq 0$.

69. Найти гармоническую функцию внутри шара единичного радиуса с центром в начале координат, принимающую заданные значения $\varphi(\theta) = \cos^2 \theta$ на поверхности этого шара.

58.

$$U(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right), \qquad (1)$$

где A_n и B_n - коэффициенты ряда Фурье функции $f(r)$.

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r) \cos n\varphi d\varphi, \quad (n = 0, 1, 2, ...), \qquad (2_1)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r) \sin n\varphi d\varphi, \quad (n = 1, 2, 3, ...). \qquad (2_2)$$

Из формулы (1) можно получить интегральное представление для решения первой внутренней задачи для уравнения Лапласа внутри круга (формула Пуассона):

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\varphi - \psi)} f(\psi) d\psi.$$

Р е ш е н и е. Требуется найти функцию $U(r, \varphi)$, непрерывную в круге $0 \le r \le a$, удовлетворяющую внутри этого круга уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0,$$

и граничному условию $U|_{r=a} = f(\varphi)$, где $f(\varphi)$- заданная функция.

Задача решается методом разделения переменных. Решение ищем в виде суммы

$$U(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(r)\Phi_n(\varphi);$$

$$\Phi_n(r)=\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases}\qquad R_n(r)=\begin{cases}r^n,\\ r^{-n}.\end{cases}$$

59. $U(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$, где a -радиус круга, A_n, B_n - определяются по формулам (2_1) и (2_2) задачи 1.

60. а) Решение внутренних краевых задач имеют вид:

1) $U(r,\varphi)=A\frac{r}{a}\sin\varphi$.

2) $U(r,\varphi)=B+3A\frac{r}{a}\sin\varphi-4A\left(\frac{r}{a}\right)^3\sin 3\varphi$.

3) $U(r,\varphi)=A\frac{r}{a}\sin\varphi-\frac{8A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}\frac{\cos 2k\varphi}{4k^2-9}$.

б) Решение внешних краевых задач даются выражениями:

1) $U(r,\varphi)=A\frac{a}{r}\sin\varphi$.

2) $U(r,\varphi)=B+3A\frac{a}{r}\sin\varphi-4A\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 3\varphi$.

3) $U(r,\varphi)=A\frac{a}{r}\sin\varphi-\frac{8A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k}\frac{\cos 2k\varphi}{4k^2-9}$.

У к а з а н и е: В задачах 2) и 3) использовалась тригонометрическая формула

$$\sin^3\varphi=3\sin\varphi-4\sin 3\varphi.$$

61. Решение второй внутренней краевой задачи для круга

$$U(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{na^{n-1}}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)+C_1.$$

Решение внешней задачи

$$U(r,\varphi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n+1}}{nr^n}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)+C_2,$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные, a - радиус круга, A_n, B_n - коэфициенты Фурье функции $f(\varphi) = \frac{\partial U}{\partial \nu}|_{r=a}$,
ν - направление внешней нормали к рассматриваемой области.

Указание: а) Требуется найти функцию $U(r, \varphi)$, непрерывную в круге $0 \leq r \leq a$, удовлетворяющую уравнению $\Delta U = 0$ внутри этого круга и граничному условию $f(\varphi) = \frac{\partial U}{\partial \nu}|_{r=a}$, а также условию $\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$.

б) Требуется найти функцию $U(r, \varphi)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta U = 0$ вне круга радиуса a, граничному условию $f(\varphi) = \frac{\partial U}{\partial \nu}|_{r=a}$, и условию ограниченности при $r \to \infty$.

62. а) $U(r, \varphi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^{n-1}(n-ah)} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) - \frac{A_0}{2h}$,

62. б) $U(r, \varphi) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{r^n(an+h)} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) - \frac{A_0}{2h}$,

где a - радиус круга, A_n, B_n - определяются по формулам (2_1) и (2_2) задачи 1.

63. Задача сводится к решению уравнения Лапласа в полярной системе координат

$$r\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0$$

при следующих дополнительных условиях: $U(r, \varphi)$, как функция от φ, периодична с периодом 2π.

$$U(a, \varphi) = f(\varphi), \quad U(b, \varphi) = F(\varphi).$$

Решая методом Фурье ($U(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$), приходим к двум уравнениям

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \quad R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{\lambda}{r^2}R(r) = 0.$$

Из условия периодичности находим, что $\lambda = k^2, \quad k = 0, 1, 2, ..$ и каждому k (кроме $k = 0$, которому соответствует одно решение $\Phi_0 = 1$) соответствуют два решения, т.е. $\hat{\Phi}(\varphi) = \cos k\varphi$ и $\tilde{\Phi}(\varphi) = \sin k\varphi$. Подставляя $\lambda = k^2$ во второе уравнение, получаем два линейно независимых решения $\hat{R}_k(r) = r^k$ и $\tilde{R}_k(r) = r^{-k}$, а при $k = 0$ $\hat{R}_0(r) = 1$ $\tilde{R}_0(r) = \ln r$. В итоге получим

$$U(r, \varphi) = \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{a}_k r^k \cos k\varphi + b_k r^k \sin k\varphi) +$$

$$+ \frac{\tilde{a}_0}{2} lnr + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k r^{-k} \cos k\varphi + \tilde{b}_k r^{-k} \sin k\varphi).$$

Для нахождения коэффициентов, используем граничные условия: подставляя $r = l$ и $r = L$ в решение, приравнивая их соответствующим членам разложения в ряд Фурье функций $f(\phi)$ и $F(\phi)$ получим соотношения для нахождения всех коэффициентов. В частном случае, когда $f(\varphi)$ и $F(\varphi)$-константы, получим $\hat{a}_k = \tilde{a}_k = \hat{b}_k = \tilde{b}_k = 0$ при $k > 0$ и

$$U(r, \varphi) = \frac{B - A}{\ln L - \ln l} \ln r + \frac{A \ln L - B \ln l}{\ln L - \ln l} = \frac{B \ln \frac{r}{l} + A \ln \frac{L}{r}}{\ln \frac{L}{l}}.$$

В общем случае

$$\hat{a}_k = \frac{1}{l^k L^{-k} - l^{-k} L^k} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[L^{-k} \varphi(\varphi) - l^{-k} F(\varphi) \right] \cos \varphi d\varphi,$$

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{l^{-k} L^k - l^k L^{-k}} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[L^k \varphi(\varphi) - l^k F(\varphi) \right] \cos k\varphi d\varphi,$$

$$\hat{b}_k = \frac{1}{l^k L^{-k} - l^{-k} L^k} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[L^{-k} \varphi(\varphi) - l^{-k} F(\varphi) \right] \sin k\varphi d\varphi,$$

$$\tilde{b}_k = \frac{1}{l^{-k}L^k - l^kL^{-k}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[L^k \varphi(\varphi) - l^k F(\varphi) \right] \sin k\varphi d\varphi.$$

64. $U(r,\varphi) = C + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{nR^{n-1}} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$

где $\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \psi(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \psi(\varphi) \sin n\varphi d\varphi$, C - произвольная постоянная.

Ряд можно просуммировать, подставив выражение для α_n и β_n в решение:

$$U(r,\varphi) = C + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \psi(\theta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{nR^{n-1}} \cos n(\theta - \varphi) d\theta =$$

$$= C + \frac{R}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \psi(\theta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Re} \left\{ \left(\frac{r}{R} \right)^n e^{in(\theta-\varphi)} \right\} d\theta =$$

$$= C + \frac{R}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \psi(\theta) \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re} \frac{z^n}{n\varsigma^n} d\theta,$$

где введено обозначения: $z = re^{i\varphi}, \quad \varsigma = Re^{i\theta}$. Используя соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \ln \frac{1}{1-t}, \qquad |t| < 1,$$

находим:

$$U(r,\varphi) = C + \frac{R}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \psi(\theta) \ln |\varsigma - z| \, d\theta.$$

65. $$U(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{\pi n}{\alpha}} \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi,$$

где

$$f_n = \frac{2}{\alpha} \int\limits_0^{\alpha} f(\varphi) \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi d\varphi.$$

В частном случае $f(\varphi) = \begin{cases} U_1 & 0 < \varphi < \frac{\alpha}{2} \\ U_2 & \frac{\alpha}{2} < \varphi < \alpha \end{cases}$ ряд суммируется и дает

$$U(r,\varphi) = \frac{U_1 + U_2}{\pi} arctg \frac{2r^{\frac{\pi}{\alpha}} \alpha^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi n}{\alpha}\varphi}{\alpha^{\frac{2\pi}{\alpha}} - r^{\frac{2\pi}{\alpha}}} +$$

$$+ \frac{U_1 - U_2}{\pi} arctg \frac{2r^{\frac{\pi}{\alpha}} \alpha^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi n}{\alpha}\varphi}{\alpha^{\frac{4\pi}{\alpha}} - r^{\frac{4\pi}{\alpha}}}.$$

При суммировании рядов была использована формула

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} \qquad (\alpha).$$

В самом деле: $J = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \xi^{2k+1} \frac{\sin(2k+1)\varphi}{2k+1} =$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \xi^{2k+1} \frac{e^{i(2k+1)\varphi}}{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \xi^{2k+1} \frac{e^{-i(2k+1)\varphi}}{2k+1} \right\}.$$

Обозначая $z = \xi e^{i\varphi} = \xi(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ и $z^* = \xi e^{-i\varphi} = \xi(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, и пользуясь формулой (α), получим

$$J = \frac{1}{4i} \ln \frac{(1+z)(1-z^*)}{(1-z)(1+z^*)} = \frac{1}{4i} \ln \frac{1 - \xi^2 + 2i\xi \sin\varphi}{1 - \xi^2 - 2i\xi\sin\varphi} = \frac{1}{2} arctg \frac{2\xi}{1-\xi^2}.$$

Отсюда и следует ответ.

66.

$$U(r,\varphi) = U_1 + \frac{4\,(U_2 - U_1)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{(2k+1)\pi}{\alpha}} \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{\alpha}\varphi}{2k+1},$$

или

$$U(r,\varphi) = \frac{2U_1}{\pi} arctg \frac{r^{\frac{2\pi}{\alpha}} - a^{\frac{2\pi}{\alpha}}}{2a^{\frac{\pi}{\alpha}} r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi n}{\alpha}\varphi} + \frac{2U_2}{\pi} arctg \frac{2r^{\frac{\pi}{\alpha}} a^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi n}{\alpha}\varphi}{r^{\frac{2\pi}{\alpha}} - a^{\frac{2\pi}{\alpha}}}.$$

67.
$$U(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}}+B_n r^{-\frac{\pi n}{\alpha}}\right)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi,$$
где
$$f_n=\frac{2}{\alpha}\int\limits_0^{\alpha} f(\varphi)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi d\varphi,\qquad F_n=\frac{2}{\alpha}\int\limits_0^{\alpha} F(\varphi)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi d\varphi,$$
$$A_n=\frac{b^{\frac{\pi n}{\alpha}}F_n-a^{\frac{\pi n}{\alpha}}f_n}{b^{2\frac{\pi n}{\alpha}}-a^{2\frac{\pi n}{\alpha}}},\qquad B_n=\frac{b^{\frac{\pi n}{\alpha}}f_n-a^{\frac{\pi n}{\alpha}}F_n}{b^{2\frac{\pi n}{\alpha}}-a^{2\frac{\pi n}{\alpha}}}(ab)^{\frac{\pi n}{\alpha}}.$$
Частные случаи: при $a\to 0$ имеем $B_n=0,\quad A_n=\frac{F_n}{b^{\frac{\pi n}{\alpha}}}$ и получаем решение задачи для кругового сектора; при $b\to\infty$ имеем $A_n=0,\quad B_n=f_n a^{\frac{\pi n}{\alpha}}$ и
$$U(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi.$$

68.
$$U(x,t)=\sum_{k=1}\frac{c_k}{r}\sin\frac{\pi k r}{l}e^{-\frac{\pi^2k^2a^2}{l^2}t},\quad c_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^{l} f(r)\sin\frac{\pi k r}{l}dr$$
частном случае: $U(r,t)=2U_0\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\frac{\sin\frac{n\pi r}{l}}{\frac{n\pi r}{l}}$.
У к а з а н и е. При решении методом Фурье в уравнении для $R(r)$;
$$rR''+2R'+\lambda^2rR=0$$
удобно сделать замену $y=rR$, тогда исходное уравнение приведется к виду
$$y''+\lambda^2y=0.$$

69. $U(r,\theta) = \frac{1}{3}(1 - r^2) + r^2 \cos^2 \theta.$

У к а з а н и е. Ввести сферические координаты (r, θ, φ), Решение U не зависит от φ , и поэтому , уравнение Лапласа сводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) = 0.$$

§8. Метод интегральных преобразований Фурье.

Преобразования Фурье на прямой $-\infty < x < \infty$ имеют вид:

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

На полупрямой $0 < x < \infty$ можно рассматривать как косинус-преобразование Фурье:

$$\bar{f}^{(c)}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi d\xi, \qquad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} \bar{f}^{(c)}(\lambda) \cos \lambda x d\lambda,$$

так и синус-преобразование:

$$\bar{f}^{(s)}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi d\xi, \qquad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} \bar{f}^{(s)}(\lambda) \sin \lambda x d\lambda.$$

Чтобы решить краевую задачу для $U(x,t)$ с помощью преобразования Фурье по переменной x переходят к задаче для образа Фурье этой функции, находят этот образ и с помощью обратного преобразования Фурье восстанавливают оригинал, т. е. находят функцию $U(x,t)$ по ее образу Фурье.

Применяя интегральные преобразования Фурье, решить следующие задачи.

70. $$U_t = a^2 U_{xx}, \qquad -\infty < x < +\infty; \quad 0 < t < \infty.$$

$$U(x,0) = f(x); \qquad -\infty < x < \infty.$$

71. $$U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t), \quad -\infty < x < \infty; \quad 0 < t < \infty;$$

$$U(x,0) = 0, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

72. $$U_t = a^2 U_{xx} : \quad 0 < x; t < \infty.$$

$$U(0,t) = 0; \quad 0 < t < \infty; \quad U(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \infty.$$

73. Найти распределение температуры внутри полубесконечного стержня, расположенного на участке прямой $0 \leq x < \infty$, если левый конец стержня теплоизолирован (т.е. $U_x'(0,t) = 0$) Начальное распределение температуры внутри стержня задано равенством $U(x,0) = f(x)$, где $f(x)$ - функция, абсолютно интегрируемая на участке $(0, +\infty)$.

74. Найти распределение температуры внутри полубесконечного стержня, расположенного на участке прямой $0 \leq x < \infty$, если на левом конце стержня поддерживается температура $U(0,t) = \varphi(t),\ 0 < t < \infty$. Начальное распределение температуры внутри стержня задано равенством $U(x,0) = 0,\ 0 < x < \infty$.

75. Решить краевую задачу:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x,t),\ -\infty < x < +\infty;\ \ 0 < t < \infty.$$

$$U(x,0) = 0;\ \ U_t(x,0) = 0;\ \ -\infty < x < \infty.$$

76. Решить краевую задачу:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx},\ 0 < x, t < \infty,$$

$$U(0,t) = \mu(t),\ 0 < t < \infty;\ \ U(x,0) = U_t(x,0) = 0,\ 0 < x < \infty.$$

77. Найти распределение температуры в бесконечном стержне, если в начальный момент температура в стержне была распределена следующим образом:

$$U(x,t)_{t=0} = \begin{cases} 0 & \mid x \mid > h, \\ -T & -h < x < 0, \\ T & 0 < x < h. \end{cases}$$

В этой задаче и во всех последующих теплообмен свободный.

78. Начальное распределение температуры внутри бесконечного стержня задается формулой:

$$U(x,t)|_{t=0} = U_0 e^{-\frac{x^2}{l^2}},$$

где U_0 и ℓ - заданные постоянные величины. Найти закон распределения температуры внутри стержня в любой момент времени $t > 0$.

79. Поверхность неограниченного стержня $-\infty < x < +\infty$ теплоизолирована, начальная температура равна нулю. В начальный момент времени в точке $x = \xi$ стержня выделилось мгновенно Q единиц тепла. Найти температуру стержня. (Построение функции источника для уравнения $U_t = a^2 U_{xx}$ на прямой $-\infty < x < +\infty$.)

80. Решить предыдущую задачу для стержня, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю. (Построение функции источника для уравнения $U_t = a^2 U_{xx} - hU$ на прямой $-\infty < x < +\infty$.)

70.
$$U(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

Р е ш е н и е. Умножим обе части уравнения $\frac{\partial U(\xi,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U(\xi,t)}{\partial \xi^2}$ на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\lambda\xi}$ и проинтегрируем по ξ от $-\infty$ до ∞, предполагая, что функция U и ее производные достаточно быстро стремятся к нулю при $\xi\to\pm\infty$. Интегрируя по частям, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial U}{\partial t}e^{-i\lambda\xi}d\xi=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Ue^{-i\lambda\xi}d\xi=\frac{d\bar{U}(\lambda,t)}{dt}=$$

$$a^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}e^{-i\lambda\xi}d\xi=a^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial U}{\partial \xi}e^{-i\lambda\xi}\Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty}+$$

$$+a^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\lambda Ue^{-i\lambda\xi}\Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty}-a^2\lambda^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Ue^{-i\lambda\xi}d\xi=$$

$$-a^2\lambda^2\bar{U}(\lambda,t).$$

Тем самым мы получили дифференциальное уравнение первого порядка для $\bar{U}$:

$$\frac{d\bar{U}}{dt}+a^2\lambda^2\bar{U}=0. \tag{1}$$

Из равенства

$$\bar{U}(\lambda,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}U(\xi,t)e^{-i\lambda\xi}d\xi$$

при $t=0$ получим начальное условие для $\bar{U}$:

$$\bar{U}(\lambda,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}U(\xi,0)e^{-i\lambda\xi}d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi=\bar{f}(\lambda).$$

Решение дифференциального уравнения (1) с учетом начального условия имеет вид:

$$\bar{U}(\lambda,t)=\bar{f}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t}.$$

Применение обратного преобразования Фурье дает:

$$U(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{U}(\lambda,t)e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t}e^{i\lambda x}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2t}e^{i\lambda(x-\xi)}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\infty}^{\infty}f(\xi)d\xi\int\limits_{0}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

При интегрировании использовалась формула:

$$\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\alpha^2\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}},$$

доказываемая дифференцированием по параметру.

71.

$$U(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\xi.$$

72.

$$U(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{\infty}f(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi.$$

Р е ш е н и е. Умножим обе части уравнения $\frac{\partial U(\xi,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U(\xi,t)}{\partial \xi^2}$ на $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \lambda\xi$. Интегрируя по ξ от 0 до ∞, получим для синус-образа Фурье функции $U(x,t)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{U}^{(s)}(\lambda,t)}{dt} + a^2\lambda^2\bar{U}^{(s)}(\lambda,t) = 0,$$

где $\bar{U}^{(s)}(\lambda,t)$-фурье образ функции $U(x,t)$, определяемый как

$$\bar{U}^{(s)}(\lambda,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty U(\xi,t) \sin \lambda\xi d\xi$$

Начальное условие для $\bar{U}^{(s)}(\lambda,t)$ получаем из определения при $t = 0$:

$$\bar{U}^{(s)}(\lambda,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty U(\xi,0) \sin \lambda\xi d\xi =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(\xi) \sin \lambda\xi d\xi = \bar{f}^{(s)}(\lambda).$$

Решение дифференциального уравнения для Фурье-образа при этих начальных условиях имеет вид:

$$\bar{U}^{(s)}(\lambda,t) = \bar{f}^{(s)}(\lambda) e^{-a^2\lambda^2 t}$$

Применяя к нему обратное синус-преобразование Фурье, получим:

$$U(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \bar{U}^{(s)}(\lambda,t) \sin \lambda x d\lambda =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty f(\xi) d\xi \int\limits_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \sin \lambda\xi \sin \lambda x d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} [\cos\lambda(x-\xi) - \cos\lambda(x+\xi)] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi.$$

73.

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right].$$

74.

$$U(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \varphi(\tau) d\tau.$$

75.

$$U\,(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x-a(t+\tau)} f(\xi,\tau) d\xi.$$

76.

$$U(x,t) = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_0^l \mu(\tau) \sin\lambda x \sin a\lambda(t-\tau) d\tau.$$

У к а з а н и е. Применить синус - преобразование Фурье.

77. $U\,(x,t) = \frac{T}{2a\sqrt{\pi t}} \left[-\int\limits_{-h}^{0} e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2 t}} d\tau + \int\limits_0^h e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2 t}} d\tau \right].$

78. $U(x,t) = \frac{U_0}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{l^2}} e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2 t}}.$

79. $U(x,t) = \frac{Q}{c\rho\sigma} G(x,\xi,t)$, где $G(x,\xi,t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}.$

У к а з а н и е. Можно предположить, что количества тепла Q, мгновенно выделевшееся в точке ξ в момент t, мгновенно же равномерно распределяется по малому интервалу $(\xi-\delta, \xi+\delta)$, тогда начальная температура стержня будет равна

$$U(x,0) = f_\delta(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < \xi - \delta \quad , \\ \frac{Q}{2\delta c\rho\sigma} & \xi - \delta < x < \xi + \delta \quad , \\ 0 & \xi + \delta < x < \infty \quad . \end{cases}$$

Решим задачу методом интегральных преобразований. Используя формулу обратного преобразования Фурье

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\xi,t) e^{i\lambda\xi} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\delta(\xi) d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} e^{i\lambda(x-\xi)} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{\infty}^{\infty} f_\delta(\xi) d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(x-\xi) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\delta(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

и, переходя в полученном результате к пределу $\delta \to 0$, получим ответ.

80.

$$U(x,t) = \frac{Q}{c\rho\sigma} G(x,\xi,t-\tau),$$

где $G(x,\xi,t) = \frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$ - есть функция источника для уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - hU$$

в случае неограниченной прямой.

§9. Специальные функции.

Решением уравнения Бесселя

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+(1-\frac{\nu^2}{x^2})y=0,$$

где ν - любое вещественное число, является функция Бесселя индекса ν :

$$J_{\pm\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k\pm\nu+1)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu}.$$

В этой формуле предполагается, что $\nu>0$.

Для функций Бесселя имеют место следующие формулы дифференцирования:

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x}-J'_\nu(x)=J_{\nu+1}(x), \tag{1}$$

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x}+J'_\nu(x)=J_{\nu-1}(x). \tag{2}$$

В частности, при $\nu=0$ для формулы (1) и при $\nu=1$ для формулы (2), получим:

$$\frac{dJ_0(x)}{dx}=-J_1(x);\quad \frac{d[xJ_1(x)]}{dx}=x\cdot J_0(x).$$

Вычитая формулу (2) из формулы (1), получим рекуррентное соотношение, позволяющее выразить каждую следующую функцию Бесселя через две предыдущие:

$$J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu-1}(x).$$

Функции Бесселя обладают свойством ортогональности с весовой функцией $\gamma(x) = x$:

$$\int\limits_0^{x_0} J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{x_0}x\right) J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{x_0}x\right) x dx = \delta_{km}\frac{x_0^2}{2}\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2,$$

где $\mu_k^{(n)}$ - k - й положительный корень функции $J_n(x)$.

Уравнение Лежандра нулевого порядка имеет вид:

$$y''(1-x^2) - 2xy' + m(m+1)y = 0.$$

Ограниченное на интервале $(-1, 1)$ решение y_m уравнения Лежандра, удовлетворяющее дополнительному условию $y(1) = 1$, называется полиномом Лежандра степени m: $y_m = P_m(x)$. Полином Лежандра однозначно определяется этими условиями; он равен

$$P_m(x) = \frac{1}{m!2^m} \cdot \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m.$$

Эта дифференциальная формула для полиномов Лежандра называется формулой Родрига.

Два различных полинома Лежандра ортогональны друг другу на интервале $(-1, 1)$ с весовой функцией $\rho(x) = 1$:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_i(x)P_k(x)dx = 0$$

при $i \neq k$. При $i = k$ имеет место равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} \left[P_k(x)\right]^2 dx = \frac{2}{2k+1}.$$

Уравнение Лежандра n-го порядка

$$y''\left(1-x^2\right)-2xy'+y\left(m(m+1)-\frac{n^2}{1-x^2}\right)=0,$$

имеет своим решением функцию

$$y_m(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{n}{2}}\cdot\left[P_m\left(x\right)\right]^{(n)},$$

где $P_m(x)$ - полином Лежандра степени m. Эта функция называется присоединённой функцией Лежандра и обозначается $y_m=P_m^n(x)$.

Для фиксированного n имеют место равенства:

$$\int\limits_{-1}^{1}P_i^n(x)P_k^n(x)dx=0\ \ (i\neq k);$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\left[P_k^n(x)\right]^2dx=\frac{2(k+n)!}{(2k+1)(k-n)!}.$$

Уравнение, проводящееся к уравнению Лежандра

$$T''_{\theta\theta}+T'_{\theta}\cdot ctg\theta+(\lambda-\frac{n^2}{\sin^2\theta})T=0,$$

где n - целое и неотрицательное, с граничными условиями - $T(\theta)$ ограничена при $\theta\to+0$ и при $\theta\to-0$, - имеет нетривиальные решения только при $\lambda=m(m+1)$ (m - целое неотрицательное число). Эти нетривиальные решения имеют следующий вид:

$$T_m(\theta)=P_n^m(\cos\theta),$$

где P_n^m -присоединенная функция Лежандра (или, при $n=0$, - полином Лежандра).

Функции $P_n^m(\cos\theta)$ при фиксированном n ортогональны друг другу на интервале $(0,\pi)$ с весом $\sin\theta$:

$$\int\limits_0^\pi P_i^n(\cos\theta)P_k^n(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 0, \quad (i\neq k);$$

$$\int\limits_0^\pi \left[P_k^n\left(\cos\theta\right)\right]^2 \sin\theta d\theta = \frac{2(k+n)!}{(2k+1)(k-n)!}.$$

81. Определить области сходимости рядов:

$$(a)\;\; J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\nu+1\right)};$$

$$(b)\;\; N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}.$$

82. Доказать: $J_{-n}\left(x\right) = \left(-1\right)^n J_n(x)$.
83. Вычислить $J_{\frac{1}{2}}\left(x\right)$.
84. Вычислить $J_{-\frac{1}{2}}\left(x\right)$.
85. Доказать: $\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$.
86. Доказать: $J_0'\left(x\right) = -J_1(x)$.
87. Доказать: $\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$.
88. Доказать: $\frac{d}{dx}\left[xJ_1(x)\right] = xJ_0(x)$.
89. Вычислить: $J_{\frac{3}{2}}\left(x\right)$.
90. Вычислить: $J_{\frac{5}{2}}\left(x\right)$.
91. Вычислить : $N_{-\frac{1}{2}}\left(x\right)$.
92. Вычислить $J_0(0), J_n(0), J_0'(0), J_n'(0)$.
93. Используя рекурентные соотношения, выразить:

а) $J_2(x)$ через $J_0(x)$ и $J_1(x)$;

в) $J_3(x)$ через $J_1(x)$ и $J_2(x)$;

с) $J_4(x)$ через $J_2(x)$ и $J_1(x)$.

94. Показать, что

а) $J_2(x) = J_0''(x) - \frac{1}{x}J_0'(x)$,

в) $J_2(x) - J_0(x) = 2J_0''(x)$.

95. Доказать, что функции $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ и $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ удовлетворяют уравнению Бесселя с $\nu = \frac{1}{2}$:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0.$$

96. Решить уравнение:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad (n = 0, 1, 2...).$$

97. Решить уравнение:

$$x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0.$$

98. Решить уравнение:

$$y'' + \frac{3}{x}y' + 4y = 0.$$

99. Решить уравнение:

$$y'' + \frac{5}{x}y' + y = 0.$$

100. Разложить функцию $f(x) = 1$ в ряд по функциям Бесселя нулевого порядка на интервале $x \in [0, l]$.

101. Разложить$f(x) = x^2$ в ряд по функциям Бесселя второго порядка на интервале $x \in [0, l]$.

102. Разложить в ряд по функциям Бесселя второго порядка на интервале $x \in [0, 1]$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1/2, \\ 0 & 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

103. Разложить$f(x) = x^3$ в ряд по функциям Бесселя третьего порядка на интервале $x \in [0, 2]$.

104. Доказать: $P_0(x) = 1$

105. Вычислить: $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$

106. Доказать, что $\int\limits_{-1}^{1} xP_m(x)dx = 0$ при $m \neq 1$.

107. Разложить в ряд Фурье по полиномам Лежандра на интервале (-1 , 1) функцию $f(x) = x^2 - x + 1$.

108. Разложить в ряд Фурье по полиномам Лежандра на интервале (-1 , 1) функцию

$$f(x) = \begin{cases} +1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

109. Разложить в ряд Фурье по полиномам Лежандра на интервале (-1 , 1) функцию $f(x) = |x|$.

110. Найти несколько первых коэффициентов ряда Фурье по присоединённым полиномам Лежандра второго рода на интервале (-1 , 1) для функции

$$f(x) = \begin{cases} +1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

111. Разложить функцию $f(\theta) = |\cos\theta|$ на участке $0 < \theta < \pi$ по ортогональной системе $\{P_n(\cos\theta)\}$, (вычислить несколько первых членов разложения).

112. Разложить функцию $f(\theta) = \sin^2\theta$ на участке $0 < \theta < \pi$ по ортогональной системе $\{P_n(\cos\theta)\}$.

113. Функция $P_m^n = (1-x^2)^{\frac{n}{2}} \cdot [P_m(x)]^{(n)}$, (где $P_m(x)$– полином Лежандра степени m) называется присоединённой функцией Лежандра.

Вычислить: $P_1^1(x),\ P_2^1(x),\ P_3^1(x),\ \ P_2^2(x), P_3^2(x), P_4^2(x)$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ.

83.$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$.

84. $J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$.

89. $J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{\sin x}{x} - \cos x)$

90 $J_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(3\frac{\sin x}{x^2} - 3\frac{\cos x}{x} - \sin x\right)$.

91. $N_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$

92. $1; 0; 0; 0$.

93. $a) J_1(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x); \quad b) J_3(x) = \frac{4}{x}J_2(x) - J_1(x);$

$c) J_4(x) = \frac{24-x^2}{x^2}J_2(x) - \frac{6}{x}J_1(x)$.

96. $y(x) = C_1 J_n(\alpha x) + C_2 N_n(\alpha x)$.

97. $y(x) = C_1 J_{\frac{1}{3}}(2x) + C_2 J_{-\frac{1}{3}}(2x)$.

98. $y(x) = \frac{1}{x}\left[C_1 J_1(2x) + C_2 N_1(2x)\right]$.

У к а з а н и е. Сделать замену $y = \frac{z}{x}$.

99. $y(x) = \frac{1}{x^2}(C_1 J_2(x) + C_2 N_2(x))$.

100.
$$1 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^{(0)} J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} x}{l}\right).$$

101.
$$x^2 = 2l^2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^{(2)} J_3\left(\mu_k^{(2)}\right)} J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)} x}{l}\right).$$

102. $f = \sum c_k J_0(x)$, где

$$c_k = \frac{J_0\left(\mu_k^{(0)}/2\right)}{\mu_k^{(0)}\left(J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right)^2}.$$

103.

$$x^3 = 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^{(3)} J_4\left(\mu_k^{(3)}\right)} J_3\left(\mu_k^{(3)}x\right).$$

105. 1; x; $\frac{1}{2}(3x^2-1)$.

107. Искомое разложение имеет вид:

$$x^2 - x + 1 = \frac{4}{3}P_0(x) - P_1(x) + \frac{2}{3}P_2(x).$$

Остальные коэффициенты ряда Фурье - Лежандра равны нулю, так как все полиномы Лежандра P_n при $n > 2$ ортогональны многочлену $x^2 - x + 1$.

108. Искомое разложение имеет вид:

$$f(x) = \frac{3}{2}P_1(x) - \frac{7}{8}P_3(x) + \frac{9}{16}P_5(x) - ...$$

[на интервале (- 1, 1)].

109. Искомое разложение имеет вид:

$$|x| = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{5}{8}P_2(x) - \frac{3}{16}P_4(x) + ...$$

[на интервале (- 1, 1)].

110. Искомое разложение имеет вид:

$$f(x) = \frac{7}{32}P_3^2(x) + \frac{11}{48}P_5^2(x) + ...$$

[на интервале (- 1, 1)].

111.Искомое разложение имеет вид:

$$|\cos\theta| = \frac{1}{2}P_0(\cos\theta) + \frac{5}{8}P_2(\cos\theta) - \frac{3}{16}P_4(\cos\theta) + ...$$

[на интервале $(0, \pi)$].

112. Искомое разложение имеет вид:

$$\sin^2\theta = \frac{2}{3}P_0(\cos\theta) - \frac{2}{3}P_2(\cos\theta).$$

Все остальные коэффициенты равны нулю.

113.

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}; \quad P_2^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 3x;$$

$$P_3^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{15}{2}x^2 - \frac{3}{2}); \quad P_2^2(x) = (1-x^2) \cdot 3;$$

$$P_3^2(x) = (1-x^2) \cdot 15x; \quad P_4^2(x) = (1-x^2) \cdot (\frac{105}{2}x^2 - \frac{15}{2}).$$

§10. Уравнения колебаний, приводящие к уравнению Бесселя.

114. Найти собственные колебания однородной круглой мембраны радиуса R, закрепленной по краям, если в начальный момент она представляет поверхность параболоида вращения, а начальные скорости равны нулю.

115. Найти закон свободных колебаний круглой мембраны радиуса ℓ, если в начальный момент отклонение в каждой точке определилось равенством:

$$U(r,\varphi,t)|_{t=0} = \frac{\ell}{100}J_0(\frac{\mu_1 r}{\ell}),$$

где μ_1 первый положительный корень бесселевой функции J_0. Начальная скорость равна нулю. Вдоль контура мембрана закреплена.

116. Найти закон свободных колебаний круглой мембраны радиуса ℓ, закрепленной вдоль контура, если все точки мембраны в начальный момент получили скорость, равную $a \cdot c$ (c - заданная безразмерная величина, a - постоянная, фигурирующая в уравнении колебания мембраны). Начальное отклонение равно нулю.

117. Изучить свободные радиальные колебания круглой мембраны, закрепленной по контуру, колеблющейся в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости.

118. Круглая однородная мембрана радиуса R, закрепленная на краю, находится в состоянии равновесия при натяжении T. В момент времени $t = 0$ к мембране приложено нормальное давление P на единицу площади. Показать, что колебание точек мембраны определится выражением:

$$U(r,t) = \frac{P}{T}\left[\frac{1}{4}(R^2 - r^2) - 2R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R})}{\mu_k^3 J_1(\mu_k^{(0)})} \cos\frac{a\mu_k t}{R}\right],$$

где μ_1, μ_2, μ_3- положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

119. Круглая однородная мембрана радиуса R, закрепленная по контуру, находится в состоянии равновесия при натяжении T. В момент времени $t = 0$ к поверхности мембраны приложена равномерно распределенная нагрузка $f = P_0 \sin\omega t$. Найти радиальные колебания мембраны.

120. Решить смешанные задачи :

$$4U_{tt} = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r - \frac{1}{r^2}U + J_1\left(\frac{\mu_1 r}{3}\right)\sin(\mu_1 t)$$

с начальными и граничными условиями:

$$U(r,0) = J_1\left(\frac{\mu_1 r}{3}\right) - J_1\left(\frac{\mu_2 r}{3}\right), \quad U_t(r,0) = 0,$$

$$|U(0,t)| < \infty, \ \ U(3,t) = 0.$$

121.

$$9U_{tt} = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r - \frac{1}{r^2}U + J_3(\mu_2 r)Cos(\mu_2 t)$$

с начальными и граничными условиями:

$$U(r,0) = 0, U_t(r,0) = \mu_1 J_3(\mu_1 r) + \mu_2 J_3(\mu_2 r),$$

$$|U(0,T)| < \infty, U(1,0) = 0,$$

где μ_1 и μ_2 - различные положительные корни уравнения

$$J_3(\mu) = 0.$$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ.

114.

$$U(r,t) = 8A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_o\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}\cos\frac{a\mu_n t}{R},$$

где $\mu_1, \nu_2, \mu_3, ...$ - положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

У к а з а н и е. Применить метод разделения переменных к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial^2 t}$$

при условии, что $U(0,t)$ равно конечной величине, $U(R,t)=0$, $U(r,0)=A\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$, где A - const, $\frac{\partial U(r,0)}{\partial t}=0$.

При нахождении коэффициентов разложения использовать следующие формулы:

$$\int\limits_0^x xJ_0(x)dx = xJ_1(x), \quad \int\limits_0^x x^3 J_0(x)dx = 2x^2J_0(x)+(x^3-4x)J_1(x).$$

115. $$U(r,\varphi,t)=\frac{l}{100}\cos\frac{a\mu_1^{(0)}t}{l}J_0\left(\frac{\mu_1^{(0)}r}{l}\right),$$

где $\mu_1^{(0)}$ - есть первый положительный корень бесселевой функции J_0.

116. $$U(r,\varphi,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2cl}{[\mu_k^{(0)}]^2J_1(\mu_k^{(0)})}\sin\frac{a\mu_k^{(0)}t}{l}J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{l}\right),$$

где $\mu_1^{(0)}$ - есть 1-ый положительный корень бесселевой функции J_0.

117. $$U(r,t)=\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-ht}\left(\cos q_nt+\frac{h}{q_n}\sin q_nt\right)\times$$

$$\times\frac{J_o\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)}{J_0^2(\mu_n)}\int\limits_0^R\rho\phi(\rho)J_o\left(\mu_n\frac{\rho}{R}\right)d\rho,$$

где $q_n=\sqrt{\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}}$, а $\mu_1,\mu_2,\mu_3,...$ - есть положительные корни бесселевой функции J_0.

118. У к а з а н и е. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 r}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial^2 t}=-\frac{P}{T}$$

при условии, что $U(0,t)$ равно конечной величине, а

$$U(R,t)=0,\quad U(r,0)=0,\quad \frac{\partial U(r,0)}{\partial r}=0.$$

119. $$U(r,t) = \frac{a^2 P_0}{T\omega^2}\left[\frac{J_0\left(\omega\frac{r}{a}\right)}{J_0\left(\omega\frac{R}{a}\right)} - 1\right]\sin\omega t -$$

$$-\frac{2aP_0\omega R^3}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\mu_n at}{R} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n^2\left(\omega^2R^2 - a^2\mu_n^2\right)J_0'(\mu_n)}.$$

120. Р е ш е н и е. Решение уравнения колебаний с внешней силой ищем в виде разложения в ряд по собственным функциям краевой задачи

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{1}{r^2}R(r) = \lambda R(r)$$

с граничными условиями: $|R(0)| < \infty$, $R(3) = 0$. Это уравнение имеет решения, удовлетворяющее граничным условиям только при отрицательных значениях константы разделения: $\lambda = -m^2$ и уравнение для собственных функций принимает вид:

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{1}{r^2}R(r) = -m^2R(r).$$

Заменой $r = mx$ оно приводится к уравнению Бесселя

$$R''(x) + \frac{1}{x}R'(x) + (1 - \frac{1}{x^2})R(x) = 0$$

решение которого имеет вид: $R(x) = C_1J_1(x) + C_2N_1(x)$. Константу C_2 нужно положить равной нулю, так как $N_1(x)$ не ограничена при $x = 0$. Граничное условие $R(x) = R(mr)|_{r=3} = 0$ дает: $3m = \mu_1, \mu_2, ...$, где $J_1(\mu_k) = 0$ и константа разделения равна $m = \frac{\mu_k}{3}$. Решение исходного уравнения ищем в виде

$$U(r,t) = T_k(t)J_1(\frac{\mu_k r}{3})$$

Раскладывая в ряд вынуждающую силу

$$J_1(\frac{\mu_k r}{3})\sin\frac{\mu_1 r}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_1(\frac{\mu_k r}{3})$$

(коэффициенты $f_k(t)$ легко определяются и равны $f_k(t) = \delta_{k,1}\sin\mu_1 t$) и подставляя вместе с $U(r,t)$ в исходное уравнение, получим

$$4\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_1(\frac{\mu_k r}{3}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_1(\frac{\mu_k r}{3}) \left(J_1''(\frac{\mu_k r}{3}) + \frac{1}{r} J_1'(\frac{\mu_k r}{3}) - \frac{1}{r^2} J_1(\frac{\mu_k r}{3}) \right)$$

$$+ f_k(t) J_1(\frac{\mu_k r}{3})$$

Используя уравнение Бесселя для функции $J_1(\frac{\mu_k r}{3})$ выражение в круглых скобках в правой части последнего уравнения заменим на $-m^2 J_1(\frac{\mu_k r}{3})$, т.е.

$$\left(J_1''(\frac{\mu_k r}{3}) + \frac{1}{r} J_1'(\frac{\mu_k r}{3}) - \frac{1}{r^2} J_1(\frac{\mu_k r}{3}) \right) = -(\frac{\mu_k r}{3})^2 J_1(\frac{\mu_k r}{3})$$

и приравнивая нулю коэффициенты при функциях Бесселя с одинаковыми значениями μ_k, получим уранение для определения $T_k(t)$:

$$4T_k''(t) + (\frac{\mu_k}{3})^2 T_k(t) = f_k(t),$$

решение которого имеет вид:

$$T_1(t) = \alpha_1 \sin\frac{\mu_1 t}{6} + \beta_1 \cos\frac{\mu_1 t}{6} - \frac{9}{35\mu_1^2}\sin\mu_1 t,$$

$$T_k(t) = \alpha_k \sin\frac{\mu_k t}{6} + \beta_k \cos\frac{\mu_k t}{6}.$$

Определяя из начальных условий α_k, β_k получим: $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -1$, $\alpha_k = 0 \quad (k > 1)$, $\alpha_1 = \frac{54}{35\mu_1^2}|$. Подставляя эти значения, получим окончательно:

$$U(r,t) = J_1(\frac{\mu_1 r}{3})[\cos\frac{\mu_1 t}{6} + \frac{1}{35\mu_1^2}(54\sin\frac{\mu_1 t}{6} - \sin\mu_1 t)] -$$

$$-J_1(\frac{\mu_2 r}{3})\cos\frac{\mu_2 t}{6}.$$

121. $U(r,t) = 3J_3(\mu_1 r)\sin\frac{\mu_1}{3}t + J_3(\mu_2 r)[3\sin\frac{\mu_2}{3}t +$

$$+\frac{1}{8\mu_2^2}(\cos\frac{\mu_2}{3}t - \cos\mu_2 t)].$$

§11. Уравнения теплопроводности, приводящие к уравнению Бесселя.

122. Найти закон остывания бесконечного цилиндра радиуса ℓ, если в начальный момент температура всех его внутренних точек равна A^0, а на его поверхности поддерживается постоянная температура 0^0.

123. Исследовать радиальное распределение тепла в бесконечном круговом цилиндре радиуса R, боковая поверхность которого поддерживается при постоянной температуре U_0. Начальная температура внутри цилиндра равна нулю.

124. Найти закон остывания бесконечного цилиндра радиуса ℓ, если в начальный момент температура внутри цилиндра определялась по формуле: $U(r,\varphi,\ell)|_{t=0} = U_0 J_0(\frac{\mu_1^{(0)} r}{\ell})$, где μ_1 - первый положительный корень бесселевой функции J_0. На поверхности цилиндра поддерживается все время постоянная температура, равная 0^0.

125. Дан неограниченный цилиндр радиуса R, начальная температура которого равна $f(r)$. С боковой поверхности цилиндра происходит лучеиспускание тепла в окружающую среду, температура которой считается равной нулю. Найти распределение температуры внутри цилиндра в любой момент времени.

126. Найти распределение температуры внутри бесконечного кругового цилиндра радиуса R при условии, что начальная температура равна $U_{t=0} = U_0(1 - \frac{r^2}{R^2})$, а на боковой поверхности поддерживается температура, равная нулю.

127. Цилиндр с радиусом основания R и высотою h имеет во все время опыта температуру нижнего основания и боковой поверхности, равную 0^0, а температура верхнего основания есть определенная функция от r. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

128. Решить предыдущую задачу в предположении что боковая поверхность цилиндра покрыта непроницаемым для теплоты чехлом.

129. Решить задачу 128 в предположении, что боковая поверхность цилиндра свободно охлаждается о воздух, имеющий температуру 0^0

130. Цилиндр с радиусом основания R и высотой h имеет температуру обоих оснований, равную 0^0, а температура боковой поверхности представляет собой заданную функцию от $z : U = f(z)$. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ.

П р и м е р. Найти закон выравнивания заданного осесимметричного начального распределения температуры $U(r,0) = r^2$ в бесконечном цилиндре радиуса R_0, боковая поверхность которого теплоизолирована.

Р е ш е н и е. Задача сводится к интегрированию уравнения:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Delta U$$

Осевая симметрия означает независимость температуры U от угловой переменной и уравнение для $U(r,t)$ в цилиндрической системе координат примет вид:

$$U_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial U}{\partial r}),$$

при начальных условиях $|U(0,t)| = r^2$ и граничных условиях : $|U(0,t)| < \infty, \frac{\partial U(R,t)}{\partial r} = 0$. Полагая $U(r,t) = R(r)T(t)$ и разделяя переменные, получаем два уравнения на R и T:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0, \qquad \frac{dT}{dt} + \lambda^2 a^2 T = 0.$$

Первое уравнение сводится к уравнению Бесселя нулевого порядка. Его решение, конечное на оси цилиндра является функция Бесселя нулевого порядка, т.е. $R(r) = C_1 J_0(\lambda r)$ (второе частное решение этого уравнения - функция Неймана $N_0(\lambda r)$ обрашается в бесконечность при $r = 0$) Из граничного условия $R'(R_0) = C_1 \lambda J_1(\lambda R_0)$, получаем $J_1(\lambda r) = 0$ или $\lambda = \lambda_k = \frac{\mu_k}{R_0}$, где μ_k - положительные корни функции Бесселя 1-го порядка $J_1(\mu_k) = 0, (k = 0, 1, 2..., \mu_0 = 0)$. Решение второго уравнения: $T_k = c_k e^{-a^2 \frac{\mu_k^2}{R_0^2} t}$.

Выражение $U(r,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k e^{-a^2 \frac{\mu_k^2}{R_0^2} t} J_0(\mu_k \frac{r}{R_0})$ удовлетворяет всем условиям задачи, кроме начального условия. Так как собственные функции задачи ортогональны с весом r на промежутке $(0, R_0)$, то коэффициенты c_k могут быть найдены по формулам:

$$c_k = \frac{\int\limits_0^{R_0} r^2 J_0\left(\mu_k \frac{r}{R_0}\right) r dr}{\int\limits_0^{R_0} J_0^2\left(\mu_k \frac{r}{R_0}\right) r dr} = \frac{2}{(R_0 J^2(\mu_k))} \int\limits_0^{R_0} r^3 J_0\left(\mu_k \frac{r}{R_0}\right) dr.$$

Оставшийся интеграл легко вычисляется с использованием соотношений $((xJ_1(x))' = xJ_0(x))$ и $J_1'(x) = -J_0(x)$.

123.

$$U(r,\phi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{\mu_n^0 J_1(\mu_n^0)} exp\left(-\frac{a^2[\mu_n^0]^2 t}{l^2}\right) J_0\left(\frac{\mu_n^0 r}{l}\right).$$

124.

$$U(r,t) = U_0\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n J_0'(\mu_n)} \exp\left(-\frac{\mu_n^2 a^2}{R^2} t\right)\right],$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, ...$ -положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

125.

$$U(r,\phi,t) = U_0 exp\left(-\frac{a^2[\mu_1^0]^2 t}{l^2}\right) J_0\left(\frac{\mu_1^0 r}{l}\right).$$

126.

$$U(r,t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2}{\mu_n^2 + H^2 R^2} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\mu_n^2 a^2}{R^2} t\right) \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{J_0^2(\mu_n)} \int\limits_0^{\infty} \rho f(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, ...$ -положительные корни уравнения

$$\mu J_0'(\mu) + HRJ_0(\mu) = 0.$$

127.

$$U(r,t) = 8U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \exp\left(-\frac{\mu_n^2 a^2}{R^2} t\right).$$

128. У к а з а н и е. Для решения задачи необходимо отыскать такой интеграл уравнения $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$, который удовлетворял бы условиям: $U|_{r=0}$ = конечной величине, $U|_{z=0} = 0, \quad U_{z+h} = f(r)$ при $0 < r < R$.

$$U(r,t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh\left(\mu_n \frac{z}{R}\right)}{sh\left(\mu_n \frac{h}{R}\right)} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{J_1^2(\mu_n)} \int\limits_0^R \rho\phi(\rho) J_o\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) d\rho$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ -положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

129.

$$U(r,t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh\left(\mu_n \frac{z}{R}\right)}{sh\left(\mu_n \frac{h}{R}\right)} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{J_0^2(\mu_n)} \int\limits_0^R \rho\phi(\rho) J_o\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ -положительные корни уравнения $\mu J_1(x) - - h_1 R J_0(x) = 0$.

130.

$$U(r,t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh\left(\mu_n \frac{z}{R}\right)}{sh\left(\mu_n \frac{h}{R}\right)} \frac{J_o\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{J_1^2(\mu_n)} \frac{1}{1 + \frac{h^2 R^2}{\mu_n^2}} \int\limits_0^R \rho\phi(\rho) J_o\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$- положительные корни уравнения $xJ_1(x) - h_1 R J_0(x) = 0$.

У к а з а н и е. Третье из граничных условий предыдущей задачи, заменить следующим: $\frac{\partial U}{\partial r}|_{r=R} + h_1 U|_{r=R} = 0, \quad h_1 = \frac{h}{k}$.

131.

$$U(r,t) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi z}{h} \frac{J_o\left(\pi \frac{nir}{h}\right)}{J_0\left(\pi \frac{niR}{h}\right)} \int\limits_0^h f(t) \sin\frac{n\pi t}{h} dt.$$

§12. Задачи, приводящие к полиномам Лежандра и к сферическим функциям.

132. Найти закон стационарного распределения температуры внутри однородного изотропного шара радиуса ℓ, если на поверхности шара все время поддерживается следующая температура:

$$U(\rho,\theta,\varphi)_{\rho=0} = \begin{cases} +U_0 & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -U_0 & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases}.$$

133. Найти закон стационарного распределения температуры внутри однородно изотропного шара радиуса ℓ, если на поверхности шара поддерживается следующая температура:

$$U(\rho,\theta,\varphi)_{\rho=0} = U_0 \sin^2\theta;\quad (U_0 = const).$$

134. Функции $\varphi(r,\theta) = \Big(1 - 2(\frac{1}{r})\cos\theta + (\frac{1}{r})^2\Big)^{-\frac{1}{2}}$ и

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0, \\ 1 & 0 < x < 1. \end{cases}$$

разложить в ряд по полиномам Лежандра.

135. Найти ограниченные решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) = 0$$

внутри и вне сферы радиуса R, если на её поверхности искомое решение имеет значение $f(\theta)$. Провести вычисления при $r < R = 1$ и при $f(\theta) = \cos^2\theta$.

136. Найти гармоническую внутри шара радиуса R функцию, принимающую на границе шара значение, равное

$$u(R,\theta,\varphi) = \sin 3\theta \cdot \cos\varphi.$$

137. Доказать, что уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

допускает частное решение

$$U = (Ar^m + \frac{B}{r^{(m+1)}})P_m(\cos\theta).$$

A и B -произвольные постоянные, $m = 0, 1, 2..$

138. Данная функция $f(r)$ при $r < R$, может быть разложена в ряд вида:

$$f(r) = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \ldots + A_n r^n + \ldots$$

а при $r > R$, в ряд следующего вида:

$$f(r) = \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^2} + \frac{B_3}{r^3} + \ldots + \frac{B_{n+1}}{r^{(n+1)}} + \ldots.$$

Найти такое решение уравнения, приведенного в предыдущей задаче, которое удовлетворяло бы условию: $U_{\theta=0} = f(r)$.

139. Круговое проволочное кольцо радиуса R заряжено единицами статического электричества. Найти потенциал $v(r, \theta)$ наэлектризованного кольца на любую точку поля.

140. Найти такое решение уравнения задачи 137, чтобы при $r = R$ (на поверхности сферы радиуса R с центром в начале координат) оно обращалось бы в данную функцию угла θ, т.е. $U_{r=R} = f(\theta)$, $0 \le \theta \le \pi$.

132.

$$U(\rho,\theta,\varphi)=U_0\left[\frac{3}{2}\frac{\rho}{l}\cos\theta-\frac{7}{8}\left(\frac{\rho}{l}\right)^3\frac{5\cos^3\theta-3\cos\theta}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{11}{6}\left(\frac{\rho}{l}\right)^5\frac{63\cos^5\theta-70\cos^3\theta+15\cos\theta}{8}+...\right].$$

У к а з а н и е. Решение ищется виде ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_m\rho^m P_m(\cos\theta)$ где $a_m=0$ для всех четных m , и $a_m=\frac{(2m+1)U_0}{l^m}\int\limits_0^1 P_m(\tau)d\tau$ для нечетных m.

133.

$$U(\rho,\theta,\varphi)=U_0\frac{2}{3}-U_0\left(\frac{\rho}{l}\right)^2\frac{3\cos^2\theta-1}{3}.$$

134.

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n P_n(\cos\theta);(r>1).$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}P_1(x)-\frac{7\cdot 2!}{2^4\cdot 2!\cdot 1!}P_3(x)+\frac{1!\cdot 4!}{2^6\cdot 3!\cdot 2!}P_5(x)-...$$

135.

$$U(r,\theta)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{r}{R}\right)^n\cdot P_n(\cos\theta), & (r<R);\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\cdot P_n(\cos\theta), & \text{если}\quad (r>R),\end{cases}$$

где

$$A_n=\frac{2n+1}{2}\int\limits_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta.$$

В частном случае $u(r,\theta)=\frac{1}{3}(1-r^2)+r^2\cos^2\theta$.

136.

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{8}{15}\left(\frac{r}{R}\right)^3P_3^1(\cos\theta)-\frac{1}{5}\frac{r}{R}P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi.$$

138.

$$U(\rho.\theta) = A_0 P_0(\cos\theta) + A_1 r P_1(\cos\theta) + ... + A_n r^n P_n(\cos\theta),$$

при $r < R$;

$$U(\rho.\theta) = B_1 \frac{1}{r} P_1(\cos\theta) + B_2 \frac{1}{r^2} P_2(\cos\theta) + ... + B_n \frac{1}{r^n} P_n(\cos\theta),$$

при $r > R$.

139.

$$v(r,t) = \frac{E}{R}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}P_2(\cos\theta) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{r^4}{R^4}P_4(\cos\theta) - ...\right].$$

при $R > r$

$$v(r,t) = \frac{E}{R}\left[\frac{r}{r} - \frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}P_2(\cos\theta) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{R^5}{r^5}P_4(\cos\theta) - ...\right].$$

при $r > R$.

140.

$$U(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(\frac{r}{R}\right)^m P_m(\cos\theta)$$

при $r < R$, и

$$U(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(\frac{R}{r}\right)^{m+1} P_m(\cos\theta)$$

при $r > R$.