1 Уравнение Бесселя и его решения

Уравнению Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{1}$$

удовлетворяют функции Бесселя:

$$J_{\pm\nu}\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^k}{\Gamma\left(k \pm \nu + 1\right) k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} \tag{2}$$

почему:

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}y\right) + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0 \tag{3}$$

$$x\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_{\pm\nu}\left(x\right)\right] = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\left(2k\pm\nu\right)^2}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu}, \tag{4}$$

$$\left(x^2-\nu^2\right)J_{\pm\nu}\left(x\right) = \left(x^2-\nu^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} =$$

$$= 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu+2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\nu^2}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} = \tag{5}$$

$k+1=j$

$$= 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k-1}}{\Gamma\left(k\pm\nu\right)\left(k-1\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\nu^2}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu}.$$

Подстановка в уравнение:

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_{\pm\nu}\left(x\right)\right) + \left(x^2-\nu^2\right)J_{\pm\nu}\left(x\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\left(2k\pm\nu\right)^2}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k-1}}{\Gamma\left(k\pm\nu\right)\left(k-1\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\nu^2}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} =$$

$$= \frac{\nu^2}{\Gamma\left(\pm\nu+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\left(2k\pm\nu\right)^2}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k-1}}{\Gamma\left(k\pm\nu\right)\left(k-1\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} -$$

$$-\frac{\nu^2}{\Gamma\left(\pm\nu+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\nu^2}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} =$$

$$= \left[\frac{\nu^2}{\Gamma\left(\pm\nu+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu} - \frac{\nu^2}{\Gamma\left(\pm\nu+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu}\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\left(-1\right)^k\left(2k\pm\nu\right)^2}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!} + 4\frac{\left(-1\right)^{k-1}}{\Gamma\left(k\pm\nu\right)\left(k-1\right)!} - \frac{\left(-1\right)^k\nu^2}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^k\left[\frac{\left(2k\pm\nu\right)^2}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!} - \frac{4k\left(k\pm\nu\right)}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!} - \frac{\nu^2}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} = \tag{6}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!}\left[\left(2k\pm\nu\right)^2 - 4k\left(k\pm\nu\right) - \nu^2\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\Gamma\left(k\pm\nu+1\right)k!}\left[\left(4k^2\pm4k\nu+\nu^2\right) - \left(4k^2\pm4k\nu\right) - \nu^2\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} = 0$$

2 Свойства функций Бесселя

Проверка формулы (1) из §9

$$\frac{\nu J_\nu\left(x\right)}{x} - J_\nu'\left(x\right) = J_{\nu+1}\left(x\right) \tag{7}$$

Если

$$J_\nu\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\Gamma\left(k+\nu+1\right)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \tag{8}$$

то

$$J_{\nu+1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+2)\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1}, \tag{9}$$

$$\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\nu}{2\Gamma(k+\nu+1)\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}, \tag{10}$$

$$J_{\nu}'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+\nu)}{2\Gamma(k+\nu+1)\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}; \tag{11}$$

тогда

$$\frac{\nu J_{\nu}(x)}{x}-J_{\nu}'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2\Gamma(k+\nu+1)\,k!}\left[\nu-(2k+\nu)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k}{\Gamma(k+\nu+1)\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}=$$

$k=j+1$

$$=0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(k+\nu+1)(k-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(j+\nu+2)\,j!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu+1}\equiv J_{\nu+1}(x) \tag{12}$$

Задание: Проверить формулу (2)

$$\frac{\nu J_{\nu}(x)}{x}+J_{\nu}'(x)=J_{\nu-1}(x) \tag{13}$$

Сложим формулы (7) и (13),

$$\frac{\nu J_{\nu}(x)}{x}-J_{\nu}'(x)=J_{\nu+1}(x)$$

$$\frac{\nu J_{\nu}(x)}{x}+J_{\nu}'(x)=J_{\nu-1}(x)$$

и получим рекуррентную формулу

$$\frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x)=J_{\nu+1}(x)+J_{\nu-1}(x) \tag{14}$$

№ 93 а) выразить $J_2(x)$ через $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

Подставляем в рекуррентную формулу $\nu=1$

$$\frac{2}{x}J_1(x)=J_2(x)+J_0(x) \tag{15}$$

Задание: № 93 в) с); № 82 методом матиндукции.

3 Функции Бесселя, сводимые к элементарным

Пример. № 83 Вычислить $J_{\frac{1}{2}}(x)$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}+1\right)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} \tag{16}$$

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}+1\right)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\dots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\prod_{j=0}^{k}\left(j+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\prod_{j=0}^{k}\left(\frac{2j+1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\frac{\prod_{j=1}^{k}(2j+1)}{2^{k+1}}=\sqrt{\pi}\frac{\prod_{j=1}^{k}(2j+1)\prod_{j=1}^{k}(2j)}{2^{k+1}\prod_{j=1}^{k}(2j)}=$$

$$=\sqrt{\pi}\frac{(2k+1)!}{2^{k+1}2^k k!}=\sqrt{\pi}\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}k!} \tag{17}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}k!}k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{\sqrt{\pi}(2k+1)!}\frac{x^{2k}}{2^{2k}}=2\sqrt{\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k+1)!}x^{2k}=$$

$$=2\sqrt{\frac{x}{2}}\frac{1}{x\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x. \tag{18}$$

Задание: № 84, 89, 90

4 Связь между функциями Бесселя разных индексов

Пример. № 85 Доказать:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right]=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} \tag{19}$$

Начнём с формулы

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x}-J'_\nu(x)=J_{\nu+1}(x): \tag{20}$$

$$\nu x^{\nu-1}J_\nu(x)\,x^{-\nu}-J'_\nu(x)\,x^\nu x^{-\nu}=J_{\nu+1}(x), \tag{21}$$

$$\frac{(x^\nu)'\,J_\nu(x)-J'_\nu(x)\,x^\nu}{x^\nu}=J_{\nu+1}(x), \tag{22}$$

$$\frac{J'_\nu(x)\,x^\nu-(x^\nu)'\,J_\nu(x)}{x^{2\nu}}=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \tag{23}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right]=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}. \tag{24}$$

Задание: № 86, 87, 88
Задание: № 95

5 Уравнения, сводящиеся к уравнениям Бесселя

Задание: №96 и 97.
В уравнениях типа

$$y''+\frac{\alpha}{x}y'+\beta y=0 \tag{25}$$

можно убрать α, заменив

$$y=x^\sigma z,\qquad y'=x^\sigma z'+\sigma x^{\sigma-1}z,\qquad y''=x^\sigma z''+2\sigma x^{\sigma-1}z'+\sigma(\sigma-1)\,x^{\sigma-2}z: \tag{26}$$

тогда

$$\left[x^\sigma z''+2\sigma x^{\sigma-1}z'+\sigma(\sigma-1)\,x^{\sigma-2}z\right]+\frac{\alpha}{x}\left[x^\sigma z'+\sigma x^{\sigma-1}z\right]+\beta x^\sigma z=0, \tag{27}$$

$$x^\sigma z''+\left[2\sigma x^{\sigma-1}z'+\frac{\alpha}{x}x^\sigma z'\right]+\left[\sigma(\sigma-1)\,x^{\sigma-2}z+\sigma\frac{\alpha}{x}x^{\sigma-1}z+\beta x^\sigma z\right]=0, \tag{28}$$

$$x^\sigma z''+\left[2\sigma\frac{1}{x}+\frac{\alpha}{x}\right]x^\sigma z'+\left[\sigma(\sigma-1)\frac{1}{x^2}+\frac{\sigma\alpha}{x^2}+\beta\right]x^\sigma z=0\Big|\cdot\frac{1}{x^\sigma} \tag{29}$$

$$z''+\frac{2\sigma+\alpha}{x}z'+\left[\frac{\left(\sigma^2-\sigma+\sigma\alpha\right)}{x^2}+\beta\right]z=0 \tag{30}$$

$$z''+\frac{2\sigma+\alpha}{x}z'+\left[\beta-\frac{\sigma-\sigma^2-\sigma\alpha}{x^2}\right]z=0. \tag{31}$$

$2\sigma+\alpha=1$, $\sigma=\frac{1-\alpha}{2}$, $\sigma-\sigma^2-\sigma\alpha=\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$

$$z''+\frac{1}{x}z'+\left[\beta-\frac{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2}{x^2}\right]z=0. \tag{32}$$

Для того, чтобы свести это уравнение к уравнению Бесселя достаточно убрать β так же, как в № 96 и 97.
Задание: № 98 и 99.

6 Ряды по функциям Бесселя

Функция Бесселя $J_\nu(x)$ обладает счётно-бесконечным множеством нулей $\mu_k^{(\nu)}$:

$$J_\nu\left(\mu_k^{(\nu)}\right) = 0, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{33}$$

где k - номер нуля.

При $\nu > -1$

$$\int\limits_0^l J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} x}{l}\right) J_\nu\left(\frac{\mu_m^{(\nu)} x}{l}\right) x dx = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ \frac{l^2}{2}\left[J_{\nu+1}\left(\mu_k^{(\nu)}\right)\right]^2, & m = k. \end{cases} \tag{34}$$

Всякая определённая и непрерывная функция $f(x)$, обладающая абсолютно сходящимся интегралом $\int\limits_0^l f(x)\sqrt{x}dx$, может быть разложена в ряд по функциям Бесселя:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} x}{l}\right). \tag{35}$$

Найдём коэффициенты C_k:

$$\int\limits_0^l dx J_\nu\left(\frac{\mu_m^{(\nu)} x}{l}\right) x \cdot \Bigg| f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} x}{l}\right), \tag{36}$$

$$\int\limits_0^l f(x) J_\nu\left(\frac{\mu_m^{(\nu)} x}{l}\right) x dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \int\limits_0^l J_\nu\left(\frac{\mu_m^{(\nu)} x}{l}\right) J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} x}{l}\right) x dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \delta_{mk} \frac{l^2}{2}\left[J_{\nu+1}\left(\mu_k^{(\nu)}\right)\right]^2 = C_m \frac{l^2}{2}\left[J_{\nu+1}\left(\mu_m^{(\nu)}\right)\right]^2, \tag{37}$$

откуда окончательно ($m = k$, $x = \xi$)

$$C_k = \frac{2}{l^2\left[J_{\nu+1}\left(\mu_k^{(\nu)}\right)\right]^2} \int\limits_0^l f(\xi) J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} \xi}{l}\right) \xi d\xi. \tag{38}$$

Пример. № 100. Разложить функцию $f(x) = 1$ в ряд по функциям Бесселя нулевого порядка ($\nu = 0$).

Общий вид этого разложения таков:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} x}{l}\right). \tag{39}$$

Найдём коэффициенты

$$C_k = \frac{2}{l^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \int\limits_0^l 1 J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} \xi}{l}\right) \xi d\xi = \tag{40}$$

Заменим $\frac{\mu_k^{(0)}\xi}{l} = \zeta$, $\xi = \frac{l\zeta}{\mu_k^{(0)}}$

$$= \frac{2}{l^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \int\limits_0^{\mu_k^{(0)}} J_0(\zeta) \frac{l\zeta}{\mu_k^{(0)}} d\frac{l\zeta}{\mu_k^{(0)}} = \frac{2}{l^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \frac{l^2}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2} \int\limits_0^{\mu_k^{(0)}} J_0(\zeta)\zeta d\zeta = \frac{2}{\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\mu_k^{(0)}\right]^2} \int\limits_0^{\mu_k^{(0)}} J_0(\zeta)\zeta d\zeta.$$

Выше доказывалась формула

$$\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x). \tag{41}$$

При $\nu = 1$

$$\frac{1}{x} J_1(x) + J'_1(x) = J_0(x). \tag{42}$$

Заменив отсюда $J_0(x)$ в последнем интеграле, разложим его на слагаемые и во втором выполним интегрирование по частям:

$$\int\limits_0^{\mu_k^{(0)}} J_0(\zeta)\zeta d\zeta = \int\limits_0^{\mu_k^{(0)}} \left[\frac{1}{\zeta} J_1(\zeta) + J'_1(\zeta)\right]\zeta d\zeta = \int\limits_0^{\mu_k^{(0)}} J_1(\zeta) d\zeta + \int\limits_0^{\mu_k^{(0)}} J'_1(\zeta)\zeta d\zeta =$$

$$= \int\limits_{0}^{\mu_k^{(0)}} J_1(\zeta)\, d\zeta + J_1(\zeta)\,\zeta\big|_0^{\mu_k^{(0)}} - \int\limits_{0}^{\mu_k^{(0)}} J_1(\zeta)\, d\zeta = J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\mu_k^{(0)}. \qquad (43)$$

Тогда

$$C_k = \frac{2}{\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\mu_k^{(0)}\right]^2} \int\limits_{0}^{\mu_k^{(0)}} J_0(\zeta)\,\zeta d\zeta = \frac{2}{\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\mu_k^{(0)}\right]^2} J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\mu_k^{(0)} = \frac{2}{J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\mu_k^{(0)}}, \qquad (44)$$

откуда приходим к искомому ряду для единицы:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} x}{l}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\mu_k^{(0)}} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} x}{l}\right). \qquad (45)$$

Задание: № 101 - 103.