

1 8.9

Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1, 0, -1)$, $B(0, -1, 1)$, лежащими на плоскости $x + y + z = 0$.
 $y(x)$, $z(x)$:

$$\begin{cases} y(0) = -1 \\ z(0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y(1) = 0 \\ z(1) = -1 \end{cases} \quad (1)$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{y'^2 + z'^2 + 1} dx \quad (2)$$

Вспомогательный функционал с учётом связи $x + y + z = 0$:

$$L^* = \int_0^1 \left[\sqrt{y'^2 + z'^2 + 1} + \lambda(x)(x + y + z) \right] dx \quad (3)$$

ур-я Эйлера:

$$\begin{aligned} F'_y &= \lambda, & F'_{y'} &= \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + z'^2 + 1}}, & \begin{cases} \lambda - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + z'^2 + 1}} = 0, \\ \lambda - \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{y'^2 + z'^2 + 1}} = 0. \end{cases} \\ F'_z &= \lambda, & F'_{z'} &= \frac{z'}{\sqrt{y'^2 + z'^2 + 1}}, \end{aligned} \quad (4)$$

Из связи: $1 + y' + z' = 0$, $z' = -1 - y'$:

$$\begin{cases} \lambda - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + z'^2 + 1}} = 0, \\ \lambda - \frac{d}{dx} \frac{-1 - y'}{\sqrt{y'^2 + z'^2 + 1}} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$-\frac{d}{dx} \frac{2y' + 1}{\sqrt{y'^2 + z'^2 + 1}} = 0, \quad (6)$$

$$y'^2 + z'^2 + 1 = y'^2 + (-1 - y')^2 + 1 = y'^2 + 1 + 2y' + y'^2 + 1 = 2y'^2 + 2y' + 2 = 2(y'^2 + y' + 1):$$

$$\frac{2y' + 1}{\sqrt{2(y'^2 + y' + 1)}} = \tilde{C}_1 \implies y' = C_1, \quad (7)$$

$$y = C_1 x + C_2, \quad z = -y - x = -C_1 x - C_2 - x = -(1 + C_1)x - C_2 \quad (8)$$

Учтём граничные условия: левое

$$\begin{cases} y(0) = C_2 = -1 \\ z(0) = -C_2 = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$y = C_1 x - 1, \quad z = -(1 + C_1)x + 1 \quad (10)$$

и правое

$$\begin{cases} y(1) = C_1 - 1 = 0 \\ z(1) = -(1 + C_1) + 1 = -1 \end{cases} \implies C_1 = 1 \quad (11)$$

$$y = x - 1, \quad z = -2x + 1 \quad (12)$$

Найдём длину. $y'^2 + z'^2 + 1 = 2(y'^2 + y' + 1) = 2(1^2 + 1 + 1) = 6$:

$$L = \int_0^1 \sqrt{y'^2 + z'^2 + 1} dx = \int_0^1 \sqrt{6} dx = \sqrt{6}. \quad (13)$$

2 8.11

Найти геодезические линии на сфере.

$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (14)$$

Длина

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (15)$$

$$L^* = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \lambda(t) (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \right] dt \quad (16)$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \equiv F, \quad \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \lambda(t) (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \equiv F^*$$

Уравнения Эйлера

$$\begin{cases} 2\lambda x - \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{F} = 0 \\ 2\lambda y - \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{F} = 0 \\ 2\lambda z - \frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{F} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

из связи:

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0 \quad (18)$$

$$x\ddot{x} + \dot{x}^2 + y\ddot{y} + \dot{y}^2 + z\ddot{z} + \dot{z}^2 = x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} + F^2 = 0 \quad (19)$$

тогда

$$\begin{cases} 2\lambda x = \frac{\ddot{x}}{F} + \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{1}{F} \\ 2\lambda y = \frac{\ddot{y}}{F} + \dot{y} \frac{d}{dt} \frac{1}{F} \\ 2\lambda z = \frac{\ddot{z}}{F} + \dot{z} \frac{d}{dt} \frac{1}{F} \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} 2\lambda x^2 = \frac{x\ddot{x}}{F} + x\dot{x} \frac{d}{dt} \frac{1}{F} \\ 2\lambda y^2 = \frac{y\ddot{y}}{F} + y\dot{y} \frac{d}{dt} \frac{1}{F} \\ 2\lambda z^2 = \frac{z\ddot{z}}{F} + z\dot{z} \frac{d}{dt} \frac{1}{F} \end{cases} \quad (21)$$

$$2\lambda (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z}}{F} + (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) \frac{d}{dt} \frac{1}{F} \quad (22)$$

$$2\lambda R^2 = \frac{-F^2}{F} + 0 = -F \quad (23)$$

$$\lambda = -\frac{F}{2R^2} \quad (24)$$

$$\begin{cases} -\frac{F}{R^2} x - \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{F} = 0 \\ -\frac{F}{R^2} y - \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{F} = 0 \\ -\frac{F}{R^2} z - \frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{F} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Замена: $F dt = ds$

$$\frac{ds}{dt} = F = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} = F \frac{d}{ds} \quad (27)$$

$$\frac{\dot{x}}{F} = \frac{1}{F} F x' = x', \quad \frac{\dot{y}}{F} = y', \quad \frac{\dot{z}}{F} = z', \quad (28)$$

$$\begin{cases} -\frac{F}{R^2} x - F \frac{d}{ds} x' = 0 \\ -\frac{F}{R^2} y - F \frac{d}{ds} y' = 0 \\ -\frac{F}{R^2} z - F \frac{d}{ds} z' = 0 \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{R^2} + x'' = 0 \\ \frac{y}{R^2} + y'' = 0 \\ \frac{z}{R^2} + z'' = 0 \end{cases} \quad (30)$$

$$\mu = \pm \frac{i}{R},$$

$$\begin{cases} x = C_1 \cos \frac{s}{R} + C_2 \sin \frac{s}{R} \\ y = C_3 \cos \frac{s}{R} + C_4 \sin \frac{s}{R} \\ z = C_5 \cos \frac{s}{R} + C_6 \sin \frac{s}{R} \end{cases} \quad (31)$$

$$C_4 x - C_2 y = (C_1 C_4 - C_2 C_3) \cos \frac{s}{R} \quad (32)$$

$$C_3 x - C_1 y = (C_2 C_3 - C_1 C_4) \sin \frac{s}{R} \quad (33)$$

$$\cos \frac{s}{R} = \frac{C_4 x - C_2 y}{C_1 C_4 - C_2 C_3}, \quad \sin \frac{s}{R} = \frac{C_3 x - C_1 y}{C_2 C_3 - C_1 C_4} \quad (34)$$

$$z = C_5 \frac{C_4 x - C_2 y}{C_1 C_4 - C_2 C_3} + C_6 \frac{C_3 x - C_1 y}{C_2 C_3 - C_1 C_4} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
(C_1C_4 - C_2C_3)z &= C_5(C_4x - C_2y) - C_6(C_3x - C_1y) = C_4C_5x - C_2C_5y - C_3C_6x + C_1C_6y = \\
&= (C_4C_5 - C_3C_6)x + (C_1C_6 - C_2C_5)y
\end{aligned} \tag{36}$$

$$(C_4C_5 - C_3C_6)x + (C_1C_6 - C_2C_5)y - (C_1C_4 - C_2C_3)z = 0 \tag{37}$$

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases} \tag{38}$$

большая окружность на сфере.