1 Степенной ряд и его область сходимости

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{1}$$

где a_n и x_0 - постоянные, не зависящие от x.

признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}\right|}{\left|a_n (x-x_0)^n\right|} = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \tag{2}$$

$$|x - x_0| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{3}$$

Обозначим

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \equiv R \tag{4}$$

тогда

$$|x - x_0| < R \tag{5}$$

$$-R < x - x_0 < R, \tag{6}$$

$$x_0 - R < x < x_0 + R, \tag{7}$$

R – *радиусом сходимости* степенного ряда.

Радиус сходимости из радикального признака Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|a_n (x-x_0)^n\right|} = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1, \tag{8}$$

$$|x - x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{10}$$

(формула Коши-Адамара).

Степенной ряд сходится абсолютно если $|x - x_0| < R$ и расходится, если $|x - x_0| > R$. Случай, когда $|x - x_0| = R$, нужно исследовать отдельно.

В Демидовиче написано, что ряд сходится при $|x - x_0| \leqslant R$, что, безусловно, ошибочно.

1.1 Пример №2813

Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x + 1)^n. \tag{11}$$

$$a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{n}, \quad x_0 = -1. \tag{12}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}{\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{-1} + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = \frac{3^{-1} + \frac{1}{3}\cdot 0}{1 + 0} = \frac{1}{3}. \tag{13}$$

Итак, ряд сходится при

$$|x + 1| < \frac{1}{3}, \tag{14}$$

т.е.

$$-1 - \frac{1}{3} < x < -1 + \frac{1}{3}, \tag{15}$$

$$-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}. \tag{16}$$

Ряд расходится при

$$|x + 1| > \frac{1}{3}, \tag{17}$$

случаи же $x = -\frac{4}{3}$ и $x = -\frac{2}{3}$ будем рассматривать отдельно.

$x=-\frac{2}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}. \tag{18}$$

$$\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}>0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]=1\neq 0, \tag{19}$$

исследуемый ряд, по второму признаку сравнения, расходится одновременно с гармоническим.

$x=-\frac{4}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n} \tag{20}$$

Первый ряд сходится по признаку Лейбница, второй - по признаку Даламбера, сумма их, следовательно, сходится.

В итоге ряд сходится при

$$x\in\left[-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right). \tag{21}$$

1.2 Другой пример: №2822

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}, \qquad a>0, \quad b>0. \tag{22}$$

$$a_n=\frac{1}{a^n+b^n}, \quad x_0=0. \tag{23}$$

пусть сначала $a>b$

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a^n+b^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}}=\frac{1}{a}, \quad R=a. \tag{24}$$

Если же $|x|=a$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{a^n+b^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=1\neq 0 \tag{25}$$

и ряд расходится.

Аналогично, если $b>a$,

$$R=b. \tag{26}$$

Итак, $R=\max(a,b)$ и ряд сходится при

$$x\in(-\max(a,b);\max(a,b)). \tag{27}$$

Задание: решить №2812, 2814, 2816.

2 ряд Тейлора вокруг точки x_0

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \qquad a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{28}$$

Будьте внимательны: на этот раз n начинается с $n=0$.

2.1 Пример 1

разложим вокруг $x_0=0$ функцию

$$f(x)=\frac{1}{1-x}. \tag{29}$$

Вычислим первые производные:

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x)=\frac{6}{(1-x)^4}. \tag{30}$$

Похоже, что

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}. \tag{31}$$

шаг индукции: пусть для некоторого $n = m$

$$f^{(m)}(x) = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}. \tag{32}$$

Докажем, что для $n = m + 1$:

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{(m+1)!}{(1-x)^{m+2}}. \tag{33}$$

продифференцируем:

$$f^{(m+1)}(x) = m! \frac{-(m+1)}{(1-x)^{m+2}} \cdot (-1) = \frac{(m+1)!}{(1-x)^{m+2}}, \tag{34}$$

что и т.д.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{1}{n!} \left. \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \right|_{x=0} = 1. \tag{35}$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{36}$$

2.2 Пример 2

$f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

$$\sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \tag{37}$$

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right). \tag{38}$$

Тогда

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{\sin^{(n)}(x)}{n!} \right|_{x=0} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{\sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)}{n!} \right|_{x=0} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n!} x^n = \tag{39}$$

сгруппируем попарно, $\sin \pi k = 0$:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi 2k}{2}}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\sin \frac{\pi(2k+1)}{2}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

$a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$.

Задание: разложить в ряд вокруг нуля e^x и $\cos x$.

3 Разложение не по формуле

3.1 Пример: №2854

Воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{40}$$

$$\frac{x^{10}}{1-x} = x^{10} \frac{1}{1-x} = x^{10} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+10} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{41}$$

а это уже - ряд Тейлора, у которого при $k = 0..9$ коэффициенты $a_k = 0$, а при $k \geqslant 10$ - $a_k = 1$.

3.2 Пример: №2853

Начнём с понижения степени

$$\sin^3 x = \sin x \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(\sin x - \sin x \cos 2x) = \frac{1}{2}\left\{\sin x - \frac{1}{2}[\sin(x + 2x) + \sin(x - 2x)]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin(3x)\right\} = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x). \tag{42}$$

Как мы уже знаем,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}. \tag{43}$$

$$\sin(3x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (3x)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}. \tag{44}$$

Тогда

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x) = \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{4} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} \left(3^{2k} - 1\right) x^{2k+1}. \tag{45}$$

3.3 Пример: № 2855

$$\frac{d}{dx}\left| \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right. \tag{46}$$

$n - 1 = k$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k \tag{47}$$

Задание: решите сами №2851, 2852, 2873 пп. а,б;