Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Казань – 2007

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова - Ленина

Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Казань
2007

УДК 517.9

Рецензенты: профессор кафедры высшей математики КГЭУ, д.ф.-м.н С. А. Григорян; доцент кафедры теории относительности и гравитации КГУ, к.ф. -м.н Р. А. Даишев.

Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева
Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. – Казань, 2007. - 44 с.
Библиогр.: 6 назв.

Данное методическое пособие посвящено изучению основных видов дифференциальных уравнений первого порядка, изучаемых в рамках курса "Дифференциальные уравнения" на физико - математическом факультете филиала КГУ г. Зеленодольске. Это пособие предлагается студентам для более эффективного освоения изучаемого материала, а так же преподавателям для проведения практических занятий. В каждом разделе приводятся необходимые теоретические сведения и подробно разбираются типовые примеры. В конце раздела предлагаются задачи для самостоятельной работы.

Оглавление

Глава 1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

1.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 1.1. Уравнения вида:

$$y' = f(x)g(y), \tag{1.1}$$

$$F(x)dx = P(y)dy, \tag{1.2}$$

$$N(y)M(x)dx = P(x)Q(y)dy. \tag{1.3}$$

называются уравнениями с разделяющимися переменными.

Уравнения вида (1.3) сводятся к уравнению вида (1.2) путем деления обеих его частей на функцию $N(y)P(x)$

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx = \frac{Q(y)}{N(y)}dy. \tag{1.4}$$

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx = \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy + C. \tag{1.5}$$

При делении могут быть потеряны решения

$$N(y) = 0, \quad P(x) = 0,$$

которые проверяются подстановкой в исходное уравнение (1.3). Потерянные решения могут входить в общее решение. В этом случае они отдельно не выписываются.

Если заданы начальные условия $y(x_0) = y_0$, то константа C определяется из общего интеграла (1.5) при $x = x_0$, $y = y_0$.

Пример 1. Найти общее и частное решение уравнения

$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию y(0)=1.

Решение. Приводим уравнение к виду (1.3):

$$-(x^2-1)\frac{dy}{dx} = 2xy^2 \Rightarrow -(x^2-1)dy = 2xy^2dx.$$

Делим обе части уравнения на $(x^2-1)y^2$:

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{2xdx}{x^2-1}.$$

Переменные разделены. Интегрируем и получаем общее решение:

$$-\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx;$$

$$\frac{1}{y} = \ln|x^2-1| + C. \tag{1.6}$$

Возможные потерянные решения:

$$(x^2-1)y = 0 \Rightarrow y = 0,\ x = \pm 1.$$

Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убедимся, что $y=0$ является потерянным решением.

Подставляем начальное условие $y(0)=1$ в общее решение (1.6), получим уравнение на C:

$$1 = \ln|0-1| + C \Rightarrow C = 1.$$

Отсюда частное решение имеет вид

$$\frac{1}{y} = \ln|x^2-1| + 1.$$

Найти общие решения уравнений:

1. $(x^2+1)dx + (y^2+1)dy = 0.$

2. $(e^x+2)dy - ydx = 0.$

3. $2(x^2y-y)dy + \sqrt{3+y^2}dx = 0.$

4. $\operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0.$

5. $(x-1)y' = y^2x.$

6. $(\cos 2x - 1)y' = y^2 - 1.$

7. $e^{2x-y}dx = e^{6x+y}dy.$

Найти частные решения, удовлетворяющие начальным условиям уравнений:

8. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2, \quad y(0) = -1.$

9. $y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

10. $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx, \quad y(0) = 1.$

Ответы: **1.** $x^3+y^3+3(x+y) = C$. **2.** $y = C(1+2e^{-x})^{-1/2}$. **3.** $4\sqrt{3+y^2} = \ln\left|\frac{C(x+1)}{x-1}\right|$, $x=\pm1$. **4.** $\operatorname{ctg}^2 y = \operatorname{tg}^2 x + C$. **5.** $-1/y = x + \ln|x-1| + C$, $y=0$. **6.** $\frac{y-1}{y+1} = Ce^{\operatorname{ctg} x}$, $y=-1$. **7.** $e^{2y} + e^{-4x}/2 = C$. **8.** $y = -3\cos x + 2$. **9.** $y = 1$. **10.** $3(1+x^2) = 2+y^2$.

1.2 Уравнения вида $y' = f(ax + by + c)$

Эти уравнения приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой

$$z(x) = ax + by + c \Rightarrow y' = \frac{z' - a}{b} \Rightarrow \frac{z' - a}{b} = f(z).$$

Пример 2. Найти решение уравнения

$$y' = \cos(y - x).$$

Решение. Делаем замену $z = y - x$; находим $y' = 1 + z'$.
Подставляем в исходное уравнение:

$$z' = \cos z - 1. \tag{1.7}$$

Приводим уравнение к виду (1.2)

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx; \quad -\frac{d\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin^2(\frac{z}{2})} = dx.$$

Интегрируем:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{z}{2}\right) = x + C.$$

Возможные потерянные решения:

$$\cos z - 1 = 0.$$

Разрешаем относительно z:

$$z = 2\pi k, \text{ где } k = \pm 0, \pm 1 \ldots \tag{1.8}$$

Непосредственной подстановкой (1.8) в (1.7) убеждаемся, что (1.8) является решением. Переходим к старым переменным:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{y - x}{2}\right) = x + C; \quad y - x = 2\pi k.$$

Найти общие решения уравнений:

11. $y' = (3x - y + 1)^2$.

12. $y' = (x + y)^2$.

13. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

14. $y' = -\operatorname{tg}^2(x - y)$.

Ответы: 11. $3x - y + 1 + \sqrt{3} = C(3x - y + 1 - \sqrt{3})e^{2\sqrt{3}x}$. **12.** $y = \operatorname{tg}(x + C) - x$. **13.** $\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln(2 + \sqrt{4x + 2y - 1}) = x + C$. **14.** $y = \frac{1}{2}\sin 2(x - y) - x + C$.

Глава 2. Однородные уравнения и приводящиеся к однородным

2.1 Однородные уравнения

Определение 2.1. Функция $F(x, y)$ называется однородной функцией степени n, если для всех $k > 0$ выполняется равенство $F(kx, ky) = k^n F(x, y)$.

Определение 2.2. Однородными уравнениями называются уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2.1}$$

$$F(x, y)dx = P(x, y)dy, \tag{2.2}$$

где $F(x, y)$ и $P(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени.

Однородные уравнения сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $y = xz(x)$, $y' = xz' + z$ или $dy = xdz + zdx$.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$(x - y)ydx - x^2 dy = 0. \tag{2.3}$$

Решение. Выясним, является ли уравнение однородным. Сравним степени однородности функций $F(x, y) = (x - y)y$ и $P(x, y) = x^2$:

$$F(kx, ky) = (kx - ky)ky = k^2(x - y)y = k^2 F(x, y),$$

$$P(kx, ky) = (kx)^2 = k^2 x^2 = k^2 P(x, y).$$

Функции $F(x, y) = (x-y)y$ и $P(x, y) = x^2$ - однородные функции степени 2, следовательно, уравнение (2.3) однородное. Полагаем $y = zx$. Тогда $dy = zdx + xdz$. Подставляем в уравнение

$$x^3 dz = -z^2 x^2 dx \Rightarrow -\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{z} = \ln|x| + C$$

Переходим к переменной y:

$$\frac{x}{y} = \ln|x| + C.$$

Потерянные решения – $x = 0$, $y = 0$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Решение. Делим числитель и знаменатель дроби на x^2 :

$$y' = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

уравнение однородно. Делаем замену $y = zx$, $y' = z + xz'$; уравнение примет вид

$$z + xz' = \frac{2z}{1 - z^2}, \quad \text{или} \quad xz' = \frac{z + z^3}{1 - z^2}.$$

Переменные разделяются:

$$\frac{dx}{x} + \frac{(z^2 - 1)dz}{z(1 + z^2)} = 0.$$

Разлагаем второе слагаемое на простые дроби:

$$\frac{z^2 - 1}{z(1 + z^2)} = \frac{Az}{1 + z^2} + \frac{B}{1 + z^2} + \frac{C}{z} = \frac{(A + C)z^2 + Bz + C}{z(1 + z^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2 - 1 = (A + C)z^2 + Bz + C.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем уравнения на A, B и C:

$$\begin{aligned} &\text{при } z^0\text{:} \quad -1 = C, \\ &\text{при } z^1\text{:} \quad 0 = B, \\ &\text{при } z^2\text{:} \quad 1 = A + C. \end{aligned}$$

Отсюда $A = 2$, $B = 0$ и $C = -1$:

$$\frac{z^2 - 1}{z(1 + z^2)} = \frac{2z}{1 + z^2} - \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{dx}{x} + \left(\frac{2z}{1 + z^2} - \frac{1}{z}\right) dz = 0.$$

Интегрируем обе части:

$$\ln|x| + \ln(z^2 + 1) - \ln|z| = \ln|C| \Rightarrow \frac{x(z^2 + 1)}{z} = C.$$

Потерянное решение – $z = 0$. Переходим к переменной y:

$$x^2 + y^2 = Cy, \quad y = 0.$$

Пример 3. Найти решение уравнения

$$xy' - y = (x + y)\ln\left|\frac{x + y}{x}\right|.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на x:

$$y' - \frac{y}{x} = (1 + \frac{y}{x}) \ln \left| 1 + \frac{y}{x} \right|.$$

Делаем замену $y = zx$, $y' = z + xz'$; уравнение примет вид

$$z'x = (1 + z) \ln |1 + z|.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{(1 + z) \ln |1 + z|} = \frac{dx}{x}; \quad \frac{d \ln |1 + z|}{\ln |1 + z|} = \frac{dx}{x}; \quad \ln |1 + z| = Cx.$$

Переходим к старой функции:

$$\ln \left| 1 + \frac{y}{x} \right| = Cx.$$

Потерянных решений нет.

Найти решения уравнений:

15. $y' = 3\frac{y^3}{x^3} + \frac{y}{x}$.

16. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

17. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0, y(2) = 1$.

18. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$.

19. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$.

Ответы: 15. $x = Ce^{-\frac{x^2}{6y^2}}$, $y = 0$. **16.** $y = -\ln \ln \frac{C}{x}$. **17.** $y = x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$. **18.**$y + \sqrt{3x^2 + y^2} = Cx^3$. **19.** $x^2 + y^2 = Ce^{4 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$.

2.2 Уравнения вида $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Эти уравнения приводятся к однородному с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ и $a_2x+b_2y+c_2 = 0$. Точку пресечения $(x_0; y_0)$ находим из системы:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Затем вводим новые переменные X и Y:

$$x = x_0 + X, \quad dx = dX;$$
$$y = y_0 + Y, \quad dy = dY.$$

Подставляем

$$Y' = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right) = f_1\left(\frac{Y}{X}\right).$$

Это однородное уравнение.

Если точка пересечения не существует, то система (2.4) не имеет решения:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \tag{2.5}$$

Тогда

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda.$$

Отсюда уравнение(2.4) принимает вид

$$y' = f\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

В этом случае уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными путем замены $z = a_2x + b_2y$.

Пример 4. Найти решение уравнения

$$y' = \frac{4y - 2x - 6}{x + y - 3}.$$

Решение. Находим точку пересечения прямых из системы

$$\begin{cases} 4y_0 - 2x_0 - 6 = 0, \\ x_0 + y_0 - 3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $y_0 = 2$, $x_0 = 1$. Делаем замену $y = y_0 + Y = 2 + Y$, $x = x_0 + X = 1 + X$, подставляем в исходное уравнение

$$Y' = \frac{4Y - 2X}{X + Y} = \frac{4\left(\frac{Y}{X}\right) - 2}{1 + \frac{Y}{X}}.$$

Получили однородное уравнение. Вводим новую функцию $Z = Y/X$:

$$Z + XZ' = \frac{4Z - 2}{1 + Z} \Rightarrow -XZ' = \frac{Z^2 - 3Z + 2}{1 + Z}.$$

Переменные разделяются:

$$-\frac{dX}{X} = \frac{(1 + Z)dZ}{Z^2 - 3Z + 2} \Rightarrow -\frac{dX}{X} = \frac{(1 + Z)dZ}{(Z - 2)(Z - 1)}.$$

Разложим правую часть уравнения на простые дроби:

$$\frac{1 + Z}{(Z - 2)(Z - 1)} = \frac{A}{Z - 2} + \frac{B}{Z - 1} = \frac{A(Z - 1) + B(Z - 2)}{(Z - 2)(Z - 1)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 + Z = A(Z - 1) + B(Z - 2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем уравнения на A и B:

$$\text{при } Z^0\text{:} \quad 1 = -A - 2B,$$
$$\text{при } Z^1\text{:} \quad 1 = A + B.$$

Отсюда $A = 3$ и $B = -2$:

$$\frac{1+Z}{(Z-2)(Z-1)} = \frac{3}{Z-2} - \frac{2}{Z-1} \Rightarrow -\frac{dX}{X} = \frac{3dZ}{Z-2} - \frac{2dZ}{Z-1}.$$

Интегрируем:

$$\ln|C| - \ln|X| = 3\ln|Z-2| - 2\ln|Z-1| \Rightarrow (Z-2)^3 X = (Z-1)^2 C.$$

Потерянное решение – $Z = 1$. Переходим к старым переменным:

$$(y-2x)^3 = (y-x-1)^2 C, \quad y = x+1.$$

Пример 5. Найти решение уравнения

$$(4y-2x+1)dx - (2y-x+2)dy = 0.$$

Решение. Приводим уравнение к виду

$$y' = \frac{4y-2x+1}{2y-x+2}.$$

Для этого уравнения выполняется условие (2.5):

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) = 0.$$

Тогда

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = 2.$$

Уравнение примет вид

$$y' = \frac{2(2y-x)+1}{2y-x+2}.$$

Делаем замену $z = 2y - x$:

$$z' = \frac{3z}{z+2} \Rightarrow 3dx = \frac{(z+2)dz}{z}.$$

Интегрируем и переходим к старым переменным:

$$z^2 = Ce^{3x-z}, \quad (2y-x)^2 = Ce^{4x-2y}.$$

Найти общие решения уравнений:

20. $(2x-y+4)dy + (x-2y+5)dx = 0.$

21. $y' = \frac{x+2y-3}{x-1}.$

22. $y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y}.$

23. $(x-2y+1)dy + (2x-4y+5)dx = 0.$

Ответы: 20. $(x+y-1)^3 = C(x-y+3)$. **21.** $y = C(x-1)^2 - x + 2$. **22.** $3x+y+2\ln|x+y-1| = C$. **23.** $(5x+10y+11)^3 = Ce^{-5(y+2x)}$.

2.3 Обобщенно - однородные уравнения

Обобщенно - однородные уравнения приводятся к однородному заменой $y = z^m$. Это возможно в том случае, когда в уравнении все члены имеют одинаковые измерения, если переменному x приписать измерение 1, переменой y — измерение m и производной y' — измерение $m-1$.

Пример 6. Найти решение уравнения

$$2x^2y' = y^3 + xy.$$

Решение. После замены $y = z^m$ уравнение примет вид $2mx^2z^{m-1}z' = z^{3m} + xz^m$. Уравнение будет однородным, если $2 + m - 1 = 3m = m + 1$. Эти равенства выполняются одновременно, если $m = \frac{1}{2}$. Делаем замену $y = z^{\frac{1}{2}}$:

$$x^2z^{-\frac{1}{2}}z' = z^{\frac{3}{2}} + xz^{\frac{1}{2}}.$$

Умножаем обе части уравнения на $\frac{z^{\frac{1}{2}}}{x^2}$:

$$z' = \left(\frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right).$$

Получили однородное уравнение. Делаем замену $z = xu$; $z' = u + xu'$:

$$xu' = u^2, \quad \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{1}{u} = -\ln|Cx|.$$

Потерянное решение – $u = 0$. Возвращаемся к функции $y(x)$:

$$x = -y^2\ln|Cx|, \quad y = 0.$$

Найти общие решения уравнений:

24. $x^3(y' - x) = y^2$.

25. $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$.

26. $xdy + y(3xy + 1)dx = 0$.

27. $y^2\sqrt{x - y^2x^2} = 2xy' + y$.

Ответы: 24. $x^2 = (x^2 - y)\ln Cx$. **25.** $1 - xy = Cx^3(2 + xy)$. **26.** $y = x^{-1}\ln^{-1}Cx^3$, $x = 0$, $y = 0$. **27.** $2\sqrt{(1/xy^2) - 1} = -\ln Cx$, $y = 0$, $xy^2 = 1$.

Глава 3. Линейные уравнения первого порядка

3.1 Линейные уравнения

Определение 3.1. Уравнения вида

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{3.1}$$

называется линейными.

При $b(x) = 0$ уравнение принимает вид

$$y' + a(x)y = 0 \tag{3.2}$$

и называются линейным однородным. Однородное линейное уравнение (3.2) интегрируется разделением переменных:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx, \quad \ln|y| = -\int a(x)\,dx, \quad y = Ce^{-\int a(x)\,dx}. \tag{3.3}$$

Интегрировать линейное неоднородное уравнение (3.1) можно двумя способами.

1.Метод вариации постоянной. Будем искать решение уравнения (3.1) в виде

$$y = C(x)e^{-\int a(x)\,dx}, \tag{3.4}$$

которое получается из (3.3) заменой C на неизвестную функцию $C(x)$. Подставляем выражение (3.4) в уравнение (3.1):

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int a(x)\,dx} - C(x)a(x)e^{-\int a(x)\,dx} + C(x)a(x)e^{-\int a(x)\,dx} = b(x),$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = b(x)e^{\int a(x)\,dx}.$$

Отсюда

$$C(x) = \int b(x)e^{\int a(x)\,dx}\,dx + C_0,$$

где C_0 - произвольная постоянная. Подставляем в формулу (3.4), получаем общее решение линейного неоднородного уравнения (3.1):

$$y = e^{-\int a(x)\,dx}\left(C_0 + \int b(x)e^{\int a(x)\,dx}\,dx\right).$$

Пример 1. Найти решение уравнения

$$y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x.$$

Решение. Решаем соответствующее однородное уравнение:

$$y' - y \cdot ctgx = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cos x dx}{\sin x}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{d \sin x}{\sin x},$$

$$\ln |y| = \ln |\sin x| + \ln |C|, \quad y = C \cdot \sin x.$$

Общее решение исходного уравнения ищем в виде

$$y = C(x) \cdot \sin x.$$

Подставляем y и $y' = C'(x) \cdot \sin x + C(x) \cdot \cos x$ в исходное уравнение:

$$C'(x) \cdot \sin x + C \cdot \cos x - \operatorname{ctg} x \cdot C(x) \sin x = \sin x,$$

откуда $C'(x) = 1$, тогда $C(x) = x + C_0$. Следовательно, общее решение уравнения есть

$$y = (x + C_0) \sin x.$$

2.Метод подстановки. Положим, $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$v\left(u' + a(x)u(x)\right) + \left(v'u - b(x)\right) = 0. \tag{3.5}$$

Выберем функцию $u(x)$ так, чтобы первая скобка в левой части уравнения (3.5) обратилась в нуль, т. е. $u(x)$ - частное решение однородного уравнения (3.2). Для этого интегрируем уравнение с разделяющимися переменными

$$u' + a(x)u(x) = 0$$

и выбираем какое либо частное решение $u = u_1(x)$. Подставляя функцию $u_1(x)$ вместо u в левую часть уравнения (3.1), получаем уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $v(x)$:

$$v'u - b(x) = 0.$$

Находим общее решение этого уравнения $v = v(x, C)$. Перемножая найденные функции $u_1(x)$ и $v(x, C)$, получаем общее решение уравнения (3.1):

$$y = u_1(x)v(x, C).$$

Пример 2. Найти решение уравнения

$$y' - \frac{2y}{x} = \frac{3}{x^2}.$$

Решение. Положим, $y = uv$ и приведем уравнение к виду

$$v\left(u' - \frac{2u}{x}\right) + \left(v'u - \frac{3}{x^2}\right) = 0. \tag{3.6}$$

Решаем уравнение

$$u' - \frac{2u}{x} = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u| = \ln x^2 + \ln|C| \Rightarrow u = Cx^2.$$

Выбираем одно частное решение $u_1 = x^2$. Подставляя u_1 в уравнение (3.6), получим

$$v'x^2 - \frac{3}{x^2} = 0, \quad dv = 3\frac{dx}{x^4}, \quad v(x, C) = C - \frac{1}{x^3}.$$

Умножаем $u_1(x)$ и $v(x, C)$, получаем общее решение данного уравнения:

$$y = Cx^2 - \frac{1}{x}.$$

Найти общие решения уравнений и частные решения, если даны начальные условия:

28. $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$.

29. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$.

30. $y' + \frac{2y}{x} = x^3$.

31. $y' - y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0$.

32. $xy' + y = x\sin x, \quad y(\pi) = 1/\pi$.

Ответы: 28. $y = (x+1)^2(x^2/2 + x + C)$. **29.** $y = 4/x^2 + Cx$. **30.** $y = x^4/6 + C/x^2$. **31.** $y = \frac{x}{\cos x}$. **32.** $y = -\cos x + (\sin x - \pi + 1)/x$.

3.2 Способы приведения уравнений к линейным

1. Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять местами искомую функцию и независимое переменное.

Пример 3. Найти решение уравнения

$$(2e^y - x)y' = 1.$$

Решение. Запишем данное уравнение в дифференциалах: $dx + xdy = 2e^y dy$. Так как в это уравнение x и y входят линейно, то уравнение будет линейным, если x считать искомой функцией, а y - независимой переменной. Тогда

$$x'_y = 1/y'_x \Rightarrow \frac{dx}{dy} + x = 2e^y. \tag{3.7}$$

Используем метод вариации постоянной. Решаем соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dx}{dy} + x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -dy \Rightarrow \ln|x| = -y + \ln|C| \Rightarrow x = Ce^{-y}.$$

Решение (3.7) ищем в виде $x = C(y)e^{-y}$. Подставляем x и $x' = C'(y)e^{-y} - Ce^{-y}$ в (3.7), получаем

$$C'(y)e^{-y} = 2e^{y} \Rightarrow dC = 2e^{2y}dy \Rightarrow C = e^{2y} + C_0.$$

Общее решение уравнения

$$x = C_0e^{-y} + e^{y}.$$

2. С помощью замены переменных уравнения можно привести к линейным.

Пример 4. Найти решение уравнения:

$$xdx = (x^2 - 2y + 1)dy.$$

Решение. Делаем замену:

$$z(x) = x^2 - 2y(x) + 1 \Rightarrow dz = 2xdx - 2dy,$$

откуда

$$xdx = \frac{1}{2}dz + dy.$$

Подставляем в исходное уравнение и получаем

$$dz = 2(z-1)dy \Rightarrow \frac{dz}{z-1} = 2dy \Rightarrow \ln|z-1| = \ln|C| + 2y \Rightarrow z - 1 = Ce^{2y}.$$

Возвращаемся к функции $y(x)$:

$$x^2 - 2y = Ce^{2y}.$$

Пример 5. Найти решение уравнения

$$x(e^{y} - y') = 2.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$x(1 - y'e^{-y}) = 2e^{-y}.$$

Делаем замену неизвестной функции $e^{-y} = z$. Тогда $-e^{-y}y' = z'$. Подставляем в исходное уравнение, получаем линейное уравнение

$$z' - \frac{2}{x}z = -1. \tag{3.8}$$

Используем метод вариации постоянной. Решаем соответствующее однородное уравнение:

$$z' - \frac{2}{x}z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = 2\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow z = Cx^2.$$

Решение исходного уравнения ищем в виде $z = C(x)x^2$. Подставляем в уравнение (3.8):

$$C'x^2 = -1 \Rightarrow C = \frac{1}{x} + C_0.$$

В результате $z = C_0x^2 + x$. Переходим к функции $y(x)$:

$$y = -\ln(C_0x^2 + x).$$

Найти общие решения уравнений:

33. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$.

34. $dx = (\sin y + 3\cos y + 3x)dy$.

35. $4y^2 dx + \left(e^{\frac{1}{2y}} + x\right) dy = 0$.

36. $\cos y y' - 3\sin y/x = x^3$.

37. $\frac{y'}{y} - \frac{2x\ln y}{x^2-1} = x + 1$.

Ответы: 33. $x = (C - \cos y)\sin y$. **34.** $x = -\sin y\cos y + C\sin y$. **35.** $y = e^{1/(2y)} + Ce^{1/(4y)}$. **36.** $\sin y = x^4 + Cx^3$. **37.** $\ln y = (x^2-1)\ln|x-1| + C(x^2-1)$.

3.3 Уравнение Бернулли

Определение 3.2. Уравнение вида

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \quad (n \neq 1) \tag{3.9}$$

называется уравнением Бернулли.

Первый способ решения. Разделим обе части уравнения (3.9) на y^n и сделаем замену $z = y^{-n+1}$:

$$z' + (-n+1)a(x)z = (-n+1)b(x).$$

В результате получим линейное неоднородное уравнение относительно z.

Пример 6. Проинтегрировать уравнение Бернулли:

$$xy' - 4y = x^2\sqrt{y}.$$

Решение. Здесь $n = \frac{1}{2}$. Делим обе части на $x\sqrt{y}$:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Вводим новую переменную:

$$z = \sqrt{y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}.$$

Подставляем в уравнение и получаем линейное уравнение

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}.$$

Решаем однородное линейное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = 2\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow z = Cx^2.$$

Применяем метод вариации постоянной:

$$z = C(x)x^2.$$

Подставляем в неоднородное уравнение и получаем

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2x} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}\ln|x| + C_0.$$

Следовательно,

$$z = x^2(C_0 + \frac{1}{2}\ln|x|) \quad \text{и} \quad y = x^4(C_0 + \frac{1}{2}\ln|x|)^2.$$

Потерянное решение – $y = 0$.

Второй способ решение. Положим,

$$y(x) = u(x)v(x). \tag{3.10}$$

Тогда уравнение (3.9) примет вид

$$u'v + (v' + a(x)v)u = u^n v^n b(x).$$

Возьмем в качестве v в формуле (3.10) какое - нибудь частное решение уравнения $v' + a(x)v = 0$. Отсюда получим уравнение с разделяющимися переменными для $u(x)$:

$$u' = u^n v^{n-1} b(x).$$

Пример 7. Найти решение уравнения

$$y' + 2y = y^2 e^x.$$

Решение. Делаем в уравнении замену $y = uv$, находим:

$$u'v + (v' + 2v)u = u^2 v^2 e^x.$$

Находим общее решение уравнения $v' + 2v = 0$:

$$\frac{dv}{v} = -2dx \Rightarrow v(x) = Ce^{-2x}.$$

Выбираем частное решение $v(x) = e^{-2x}$. Подставляем $y = ue^{-2x}$ в исходное уравнение:

$$u'e^{-2x} = u^2 e^{-3x} \Rightarrow \frac{du}{u^2} = e^{-x}dx \Rightarrow \frac{1}{u} = e^{-x} + C \Rightarrow u = (e^{-x} + C)^{-1}.$$

Отсюда общее решение $y = ue^{-2x} = (e^x + Ce^{2x})^{-1}$. Потерянное решение – $y = 0$.

Найти общие решения уравнений:

38. $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$.

39. $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3$.

40. $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x$.

41. $3xdy = y(1 + x\sin x - 3y^3 \sin x)dx$.

Ответы: 38. $y = (x^2 + Cx)^{-1}$, $y = 0$. **39.** $y^{-2} = \frac{5x^2}{28} + \frac{1}{4} + \frac{C}{x^{3/2}}$, $y = 0$. **40.** $y^2 = 1 + Ce^{-\sin x}$. **41.** $y^3(3 + Ce^{\cos x}) = x$, $y = 0$.

3.4 Уравнение Дарбу

Определение 3.3. Уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy + P(x,y)(xdy - ydx) = 0, \tag{3.11}$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ - однородные функции степени m, а P - однородная функция степени $l\,(l \neq m-1)$, называется уравнением Дарбу.

Уравнение Дарбу, в котором $N \neq 0$, при помощи замены $y = zx$ приводится к уравнению Бернулли, а в случае $l = m-2$ - к линейному уравнению. Если $N \equiv 0$, то замена $y = zx$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными. Полупрямые $y = z_i x\,(x \neq 0)$, где z_i - корни уравнения $M(1,z) + N(1,z)z = 0$, могут быть особыми решениями.

Пример 8. Найти решение уравнения

$$xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0.$$

Решение. Полагая $y = zx$, имеем $(1+z^2)dx + (zx + x^2)dz = 0$. Отсюда

$$\frac{dx}{dz} + \frac{zx}{1+z^2} = -\frac{x^2}{1+z^2}.$$

Это уравнение Бернулли. Интегрируем его, находим

$$\frac{1}{x} = C\sqrt{1+z^2} + z.$$

Заменяя z на $\frac{y}{x}$, получаем

$$C\sqrt{x^2+y^2} + y - 1 = 0.$$

Пример 9. Найти решение уравнения

$$-x\sqrt{x^2-y^2}dx + xdy - ydx = 0.$$

Решение. Это уравнения Дарбу, в котором $N \equiv 0$. Полагаем $y = zx$:

$$x(z'x + z) - zx = x\sqrt{x^2 - z^2x^2} \Rightarrow z' = \sqrt{1-z^2} \Rightarrow z = \sin(x+C),$$

где $-\frac{\pi}{2} - C \leq x \leq \frac{\pi}{2} - C$. Особые решения $z = \pm 1$. Следовательно,

$$y = x\sin(x+C), \quad -\frac{\pi}{2} - C \leq x \leq \frac{\pi}{2} - C; \quad y = \pm x\,(x \neq 0).$$

3.5 Уравнение Риккати

Определение 3.4. Уравнение вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \tag{3.12}$$

в котором правая часть есть квадратичная функция от искомой функции y, называется уравнением Риккати.

Если известно одно частное решение y_1 уравнения Риккати, то подстановка $y = y_1 + \frac{1}{z}$, где z - новая неизвестная функция, приводит это уравнение к линейному. Заменой $y = y_1 + z$ уравнение Риккати приводится к уравнению Бернулли.

Пример 10. Найти решение уравнения

$$xy' - y^2 = -(2x+1)y + x^2 + 2x.$$

Решение. Предположим, что частное решение имеет вид $y_1 = ax + b$. Подставляем его в уравнение:

$$ax = a^2x^2 + 2abx + b^2 - (2x+1)(ax+b) + x^2 + 2x,$$

$$ax = (a^2 - 2a + 1)x^2 + (2ab - 2b - a + 2)x - b.$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах, получаем уравнения на a и b:

$$\begin{aligned} &\text{при } x^0: \quad 0 = -b, \\ &\text{при } x^1: \quad a = 2ab - 2b - a + 2, \\ &\text{при } x^2: \quad 0 = a^2 - 2a + 1. \end{aligned}$$

Отсюда $a = 1$, $b = 0 \Rightarrow y_1 = x$. Делаем замену

$$y = x + \frac{1}{z}$$

в исходном уравнении

$$xz' = z - 1 \Rightarrow \frac{dz}{z-1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow z = 1 + Cx.$$

Потерянное решение $z - 1 = 0$ следует из общего решения при $C = 0$. Возвращаемся к функции $y(x)$:

$$y = x + \frac{1}{1 + Cx}.$$

Пример 11. Найти решение уравнения

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$$

Решение. Предположим, что частное решение имеет вид $y_1 = be^x$. Подставляем в уравнение:

$$be^x + 2be^{2x} - b^2e^{2x} = e^{2x} + e^x.$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах, получаем уравнения на b:

$$\begin{aligned} &\text{при } e^x: \quad b = 1, \\ &\text{при } e^{2x}: \quad 2b - b^2 = 1. \end{aligned}$$

Отсюда $b = 1 \Rightarrow y_1 = e^x$. Делаем замену

$$y = e^x + \frac{1}{z}$$

в исходном уравнении

$$z' = -1 \Rightarrow z = -(x + C).$$

Возвращаемся к функции $y(x)$:

$$y = e^x - \frac{1}{x + C}.$$

Уравнение Риккати вида $y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2}$

Уравнение Риккати вида

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2}, \tag{3.13}$$

где A, B и C - постоянные числа, причем $(B+1)^2 \geqslant 4AC$, имеет частное решение

$$y_1 = \frac{a}{x}, \tag{3.14}$$

где a - некоторое постоянное число, определяемое подстановкой (3.14) в уравнение (3.13).

Уравнение (3.13) можно также привести к уравнению с разделяющимися переменными путем замены $y = \frac{z}{x}$.

Пример 12. Найти решение уравнения

$$y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2}.$$

Решение. Его частное решение будем искать в виде $y_1 = \frac{a}{x}$. Подставляя y_1 в уравнение, получаем

$$-\frac{a}{x^2} = \frac{a^2}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0,$$

откуда $a = -1$. Следовательно, $y_1 = -\frac{1}{x}$. Полагая теперь

$$y = y_1 + \frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z},$$

приходим к линейному уравнению

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{1}{2},$$

которое можно решить методом вариации постоянной или методом подстановки. Интегрируем его, находим

$$z = \frac{x}{2}(C - \ln|x|).$$

Поэтому

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x(C - \ln|x|)}.$$

Уравнение Риккати вида $y' = A\frac{y^2}{x} + \frac{1}{2}\frac{y}{x} + C$

Уравнение Риккати вида

$$y' = A\frac{y^2}{x} + \frac{1}{2}\frac{y}{x} + C \quad \text{или} \quad y'x - \frac{1}{2}y - Ay^2 = Cx \tag{3.15}$$

подстановкой $y = z\sqrt{x}$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными $\sqrt{x}z' = Az^2 + C$ и, следовательно, всегда интегрируется в элементарных функциях.

Специальное уравнение Риккати $y' + Ay^2 = Bx^m$

Определение 3.5. Уравнение вида

$$y' + Ay^2 = Bx^m \tag{3.16}$$

называется специальным уравнением Риккати.

При $m = 0$ получаем уравнение с разделяющимися переменными; при $m = -2$ получаем уравнение вида (3.13). Уравнение интегрируется в элементарных функциях также при всех m, для которых

$$\frac{m}{2m+4} = k\,(k \in \mathbb{Z}). \tag{3.17}$$

В этом случае уравнение можно привести к уравнению вида (3.15). Вводя вместо x и y новые переменные t и z по формулам

$$x^{m+2} = t, \quad y = \frac{z(t)}{x} = \frac{z(t)}{t^{1/(m+2)}}, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

получаем уравнение

$$tz' + \alpha z + \beta z^2 = \gamma t \left(\alpha = k - \frac{1}{2}\right),$$

которое приводится к уравнению вида (3.15) с помощью последовательного применения подстановок:

$$z = \frac{t}{\frac{1+\alpha}{\gamma} + u} \quad \text{или} \quad z = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{t}{u}, \tag{3.18}$$

соответственно увеличивающих или уменьшающих число α на единицу.

Пример 13. Найти решение уравнения

$$y' = y^2 + x^{-4}.$$

Решение. Здесь $m = -4$, условие (3.17) выполнено, причем $k = 1$. Применяя подстановки

$$y = \frac{z}{x} = z(t)\sqrt{t}, \quad x^{-2} = t, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(z(t)\sqrt{t}\right)'_t}{(1/\sqrt{t})'_t} = -2t^2 z'_t - tz,$$

получаем

$$tz' + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}t \left(\alpha = \frac{1}{2},\, \beta = \frac{1}{2},\, \gamma = -\frac{1}{2}\right).$$

Чтобы привести это уравнение к виду (3.15), нужно применить один раз подстановку (3.18), т.е $z = -1 + \frac{t}{u}$, после чего имеем

$$tu' - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}t.$$

Это уравнение вида (3.15). Полагая $u = v\sqrt{t}$, находим

$$\sqrt{t}v' = \frac{1+v^2}{2},$$

откуда

$$v = \operatorname{tg}(\sqrt{t} + C),\ -\frac{\pi}{2} - C \leq \sqrt{t} \leq \frac{\pi}{2} - C.$$

Следовательно,

$$u = \sqrt{t}\operatorname{tg}(\sqrt{t} + C), \quad z = -1 + \sqrt{t}\operatorname{ctg}(\sqrt{t} + C).$$

Переходим к функции $y(x)$:

$$y = \frac{1}{x^2}\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x} + C\right) - \frac{1}{x}.$$

Замена $y = \alpha(x)z$

Уравнения Риккати (3.12) с помощью подстановки вида $y = \alpha(x)z$ можно привести к такому уравнению Риккати, в котором коэффициент при квадрате искомой фукнкции равен ± 1.

Подстановкой вида $y = z + \beta(x)$ можно, не меняя коэффициента при квадрате искомой функции, сделать равным нулю сумму коэффициентов при $z(x)$.

Комбинируя указанные подстановки, уравнение Риккати можно привести к виду $y' = \pm y^2 + R(x)$. Если при этом окажется, что $R(x) = Bx^m$, получаем специальное уравнение Риккати.

Пример 14. Найти решение уравнения, приведя его к виду $y' = y^2 + C$:

$$xy' = x^2y^2 + y + 2x^{-2} + 2.$$

Решение. С помощью подстановки $y = \beta(x)z$ приведем к уравнению Риккати, в котором коэффициент при квадрате искомой функции равен 1:

$$x\beta'z + x\beta z' = \beta^2x^2z^2 + \beta z + 2x^{-2} + 2.$$

Приравнивая коэффициент при квадрате искомой функции z единице, получаем уравнения на функцию β:

$$\beta^2x^2 = 1 \quad \text{или} \quad \beta = x^{-1}.$$

Делаем подстановку $y = x^{-1}z(x)$ в исходном уравнении

$$z' = z^2 + 2\frac{z}{x} + \frac{2}{x^2} + 2.$$

Переходим к новой функции $z = u(x) + \alpha(x)$ в последнем уравнении

$$u' + \alpha' = u^2 + \alpha^2 + 2\alpha u + 2\frac{u}{x} + 2\frac{\alpha}{x} + \frac{2}{x^2} + 2.$$

Функцию $\alpha(x)$ подбираем так, чтобы алгебраическая сумма коэффициентов при u равнялась нулю:

$$2\alpha + \frac{2}{x} = 0 \quad \text{или} \quad \alpha = -\frac{1}{x}.$$

В результате получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$u' = u^2 + 2, \quad \frac{du}{u^2+2} = dx, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) = x + C, \quad u = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}(\sqrt{2}x + C).$$

Возвращаемся к функции $y(x)$:

$$y = \frac{\sqrt{2}}{x}tg(\sqrt{2}x + C) - \frac{1}{x^2}, -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{C}{\sqrt{2}} < x < \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{C}{\sqrt{2}}.$$

Найти общие решения для уравнений:

42. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.

43. $x^2y' = x^2y^2 + yx + 1$.

44. $y' = -y^2 + x^4$.

45. $xy' = y^2 - 3y + 4x^2 + 2$.

Ответы:

42. $y = x + 2 + \frac{4}{Ce^{4x}-1}, \quad y = x + 2$.

43. $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x(C - \ln x)}$.

44. $y = \frac{1}{x} + \mathrm{tg}(-1/x + C)/x^2$.

45. $y = 2x\,\mathrm{tg}(2x + C) + 2$.

Глава 4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

4.1 Уравнения в полных дифференциалах

Определение 4.1. Уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{4.1}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$.

Предполагаем, что функции M и N определены и непрерывны в некоторой односвязной области D и имеют в ней непрерывные частные производные соответственно по x и y. Тогда для того чтобы уравнение (4.1) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{4.2}$$

Способы решения

1. Чтобы решить уравнение (4.1), надо найти функцию $F(x,y)$, от которой полный дифференциал $dF(x.y) = F'_x dx + F'_y dy$ равен левой части уравнения (4.1). Тогда общее решение уравнения (4.1) можно записать в виде $F(x,y) = C$, где C - произвольная постоянная. Функция $F(x,y)$ должна удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N. \end{cases} \tag{4.3}$$

Интегрируя (частным образом) по x первое из уравнений (4.3), имеем

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y), \tag{4.4}$$

где $\varphi(y)$ - любая функция от y.

Выбираем $\varphi(y)$ так, чтобы функция (4.4) была решением и второго из уравнений (4.3). Дифференцируя уравнение (4.4) по y и полагая $\frac{\partial F}{\partial y} = N$, получаем для нахождения $\varphi(y)$ легко интегрируемое дифференциальное уравнение $\varphi'(y) = \omega(y)$, правая часть которого зависит только от y. Интегрируя это уравнение, видим, что в качестве $\varphi(y)$ можно взять $\varphi(y) = \int \omega(y)dy$. Поэтому общий интеграл уравнения (4.1) можно записать так:

$$\int M(x,y)dx + \int \omega(y)dy = C.$$

Аналогично исходя из уравнения $\frac{\partial F}{\partial y} = N$, приходим к общему интегралу вида

$$\int N(x,y)dx + \int \omega_1(y)dy = C.$$

Общий интеграл можно найти сразу, используя формулу

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C.$$

Значение x_0 и y_0 выбирают так, чтобы существовали эти два интеграла, а последний имел наиболее простой вид.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

Решение. В данном примере

$$M(x,y) = 2xy; \quad N(x,y) = x^2 - y^2.$$

Так как

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x} = 2x,$$

то уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Искомая функция $F(x,y)$ определяется из системы

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - y^2. \end{cases} \tag{4.5}$$

Интегрируя первое уравнение из системы (4.5), получим

$$F(x,y) = \int 2xydx = x^2y + \varphi(y). \tag{4.6}$$

Подставляем (4.6) во второе уравнение системы (4.5), получаем

$$x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \varphi'(y) = -y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{y^3}{3}.$$

Из (4.6) следует

$$F(x,y) = x^2y - \frac{y^3}{3}.$$

Общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$x^2y - \frac{y^3}{3} = C.$$

2. Общий интеграл уравнения (4.1) можно также записать в виде

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C \tag{4.7}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C, \tag{4.8}$$

где нижние пределы x_0 и y_0 выбираются произвольно, но так, чтобы точка (x_0, y_0) принадлежала области D.

В этих формулах интегрирование производится по одной из переменных, в то время как вторая является параметром, причем в одном из интегралов параметр фиксируется (полагается равным нижнему пределу другого интеграла).

Пример 2. Найти решение уравнения

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Решение. Здесь

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy,$$

т.е. условие (4.2) выполнено, и, следовательно, данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Найдем общий интеграл уравнения по формуле (4.7). Взяв $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, получим

$$\int_{0}^{x} (3x^2 + 6xy^2)dx + \int_{0}^{y} 4y^3dy = C.$$

Отсюда

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

3. Для решения некоторых уравнений можно применить метод выделения полных дифференциалов, используя известные формулы:

$$d(x^ay^b) = x^{a-1}y^{b-1}(aydx + bxdy), \quad d(xy) = xdy + ydx, \tag{4.9}$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}, \quad d(y^a) = ay^{a-1}dy, \quad d(\ln y) = \frac{dy}{y} \quad \text{и т. п.}$$

Пример 3. Найти решение уравнения

$$(x^3 - y)dx - (y^2 + x)dy = 0.$$

Решение. Сначала выделяем группу членов, представляющую собой полный дифференциал:

$$x^3dx - ydx - y^2dy - xdy = 0.$$

Так как

$$x^3dx = d\frac{x^4}{4}, \quad y^2dy = d\frac{y^3}{3}, \quad -ydx - xdy = -d(xy), \tag{4.10}$$

то

$$d\left(\frac{x^4}{4} - \frac{y^3}{3} - xy\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{y^3}{3} - xy = C.$$

Пример 4. Найти решение уравнения

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$$

Решение.

$$y^3dy = d\frac{y^4}{4}, \quad \frac{y}{x}dx + \ln x dy = yd\ln x + dy\ln x = d(y\ln x).$$

Отсюда

$$d\left(\frac{y^4}{4} + y\ln x\right) = 0 \Rightarrow \frac{y^4}{4} + y\ln x = C.$$

4. Если в уравнении можно выделить полные дифференциалы некоторых функций $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, то иногда уравнение упрощается, если от переменных (x,y) перейти к переменным (g,z), где $z = \varphi(x,y)$, $g = \psi(x,y)$.

Пример 5. Найти решение уравнения

$$ydx - (x^3y + x)dy = 0.$$

Решение. Разделив уравнение на x^2, получаем

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} - xydy = 0 \Rightarrow d\left(\frac{y}{x}\right) + xydy = 0.$$

Перейдём от переменных (x,y) к переменным (z,y), где $z = \frac{y}{x}$:

$$dz + \frac{y^2}{z}dy = 0.$$

Откуда

$$zdz + y^2dy = 0 \Rightarrow \frac{z^2}{2} + \frac{y^3}{3} = C.$$

Возвращаемся к старым переменным:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y^3}{3} = C.$$

При делении на -x^2 было потеряно решение $x = 0$.

Пример 6. Найти решение уравнения:

$$y^3dx - 2xy^2dy - x^4dy + 2yx^3dx = 0, \quad (x > 0, \quad y > 0).$$

Решение. Сгруппируем члены уравнения так, чтобы можно было выделить полные дифференциалы

$$y^2(ydx - 2xdy) + x^3(2ydx - xdy) = 0.$$

Применив формулу (4.9), получим

$$ydx - 2xdy = y^3 d\left(\frac{x}{y^2}\right),$$

$$2ydx - xdy = \frac{y^2}{x} d\left(\frac{x^2}{y}\right).$$

Поэтому уравнение можно переписать в виде

$$y^5 d\left(\frac{x}{y^2}\right) + y^2x^2 d\left(\frac{x^2}{y}\right) = 0.$$

Делаем замену переменных

$$u = \frac{x}{y^2}, \quad v = \frac{x^2}{y},$$

Отсюда

$$y = \left(\frac{v}{u^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad x = \left(\frac{v^2}{u}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Подставляем в уравнение

$$\left(\frac{v}{u^2}\right)^{\frac{5}{3}} du + \left(\frac{v^2}{u}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{v}{u^2}\right)^{\frac{2}{3}} dv = 0.$$

Разделив переменные, получим

$$u^{-\frac{4}{3}} du + v^{\frac{1}{3}} dv = 0,$$

Интегрируем

$$-u^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} v^{\frac{4}{3}} = C.$$

Возвращаемся к переменным x и y:

$$\frac{x^3}{4} - y^2 = C\sqrt[3]{y^4x}.$$

4.2 Интегрирующий множитель

Определение 4.2. Интегрирующим множителем для уравнения

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{4.11}$$

называется такая функция $\mu(x,y) \neq 0$, после умножения на которую уравнение превращается в уравнение в полных дифференциалах.

Если найден интегрирующий множитель $\mu(x,y)$, то интегрирование данного уравнения сводится к умножению обеих его частей на $\mu(x,y)$ и нахождению общего интеграла полученного уравнения в полных дифференциалах. Если $\mu(x,y)$ во всех точках некоторой кривой обращается в бесконечность, то возможна потеря некоторых решений данного уравнения; если $\mu(x,y)$ обращается в нуль, то есть вероятность получить посторонние решения. Если $\mu(x,y)$ есть непрерывно дифференцируемая функция от x и y, то

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Отсюда

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right). \tag{4.12}$$

1. Если заранее известно, что $\mu = \mu(\omega)$, где ω - заданная функция от x и y, то уравнение (4.12) сводится к обыкновенному уравнению с неизвестной функцией μ от независимой переменной ω

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \psi(\omega)\mu, \tag{4.13}$$

где

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}} \equiv \psi(\omega), \tag{4.14}$$

т.е. дробь слева является функцией только от ω.

Решая уравнение (4.13), находим интегрирующий множитель

$$\mu = ce^{\int \psi(\omega)d\omega}.$$

В частности, уравнение (4.11) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x $(\omega = x)$ или только от $y(\omega = x)$, если выполнены, соответственно, следующие условия:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \psi(x) \quad (\mu = e^{\int \psi(x)dx}) \tag{4.15}$$

или

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \equiv \psi(y) \quad (\mu = e^{\int \psi(y)dy}). \tag{4.16}$$

Пример 7. Найти решение уравнения

$$(1 - yx^2)dx + x^2(x - y)dy = 0.$$

Решение. Проверим, не имеет ли оно интегрирующего множителя, зависящего только от x:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2(y - x)} = -\frac{2}{x} \equiv \psi(x),$$

т.е. условие (4.15) выполнено. Поэтому

$$\mu = e^{\int \psi(x)dx} = exp(-\int \frac{2}{x}dx) = \frac{1}{x^2}.$$

Умножая обе части исходного уравнения на $\frac{1}{x^2}$, получаем

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right) dx + (y - x)dy = 0.$$

Убедимся, что полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(\frac{1}{x^2} - y)}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(y - x)}{\partial x} = -1,$$

Общий интеграл уравнения определяется из системы

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x^2} - y \\ \frac{\partial F}{\partial y} = y - x. \end{cases} \tag{4.17}$$

Из первого уравнения системы (4.17) находим

$$F = -\frac{1}{x} - yx + \varphi(y).$$

Подставляем F во второе уравнение системы (4.17), получаем уравнение на функцию $\varphi(y)$:

$$\varphi' = y \Rightarrow \varphi = \frac{y^2}{2}.$$

Отсюда

$$F = -\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2}.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$-\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2} = C.$$

Интегрирующий множитель μ в нуль не обращается, значит посторонних решений нет. При $x = 0$ μ обращается в бесконечность, т.е возможно $x = 0$ – потерянное решение. Непосредственная подстановка в исходное уравнение показывает, что $x = 0$ является решением.

Пример 8. Найти решение уравнения

$$(\sqrt{x^2-y}+2x)dx-dy=0,$$

если известно, что для него интегрирующий множитель имеет вид $\mu=\mu(x^2-y)$.

Решение. Полагая в условии (4.14) $\omega=x^2-y$,

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x}-M\frac{\partial \omega}{\partial y}}=\frac{\frac{(-1)}{2\sqrt{x^2-y}}}{-2x+(\sqrt{x^2-y}+2x)}=-\frac{1}{2(x^2-y)}=-\frac{1}{2\omega}\equiv\psi(\omega).$$

Поэтому

$$\mu=e^{\int\psi(\omega)d\omega}=e^{-\int\left(\frac{1}{2\omega}\right)d\omega}=\frac{1}{\sqrt{\omega}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y}}.$$

Умножая обе части исходного уравнения на $\frac{1}{\sqrt{x^2-y}}$ и группируя, получим

$$dx+\frac{2xdx-dy}{\sqrt{x^2-y}}=0\Rightarrow dx+\frac{d(x^2-y)}{\sqrt{x^2-y}}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx+2d(\sqrt{x^2-y})=0\Rightarrow x+2\sqrt{x^2-y}=C.$$

Здесь μ обращается в бесконечность в точках кривой $y=x^2$. Функция $y=x^2$ является потерянным решением.

2. Интегрирующий множитель уравнения (4.11) можно отыскать с помощью разбиения этого уравнения на группы, для каждой из которых легко находится интегрирующий множитель.

Пусть уравнение (4.11) допускает разбиение на две такие группы:

$$(M_1(x,y)dx+N_1(x,y)dy)+(M_2(x,y)dx+N_2(x,y)dy)=0 \tag{4.18}$$

и μ_1, μ_2 - их интегрирующие множители, так что

$$\mu_1(M_1dx+N_1dy)=dU_1,\quad \mu_2(M_2dx+N_2dy)=dU_2.$$

Попытаемся подобрать функции $\varphi(U_1)$ и $\psi(U_2)$ таким образом, чтобы

$$\mu_1\varphi(U_1)=\mu_2\psi(U_2). \tag{4.19}$$

Тогда функция

$$\mu=\mu_1\varphi(U_1)=\mu_2\psi(U_2)$$

будет интегрирующим множителем всего уравнения (4.18), которое после умножения обеих его частей на этот интегрирующий множитель примет вид

$$\varphi(U_1)dU_1+\psi(U_2)dU_2=0,$$

и, следовательно, общий интеграл уравнения (4.18) запишется так:

$$\int \varphi(U_1)dU_1 + \int \psi(U_2)dU_2 = C. \tag{4.20}$$

Замечание 1. Подбор функции φ и ψ иногда облегчается заменой интегралов U_1 и U_2 другими интегралами, определенными в той же области. Но тогда нельзя записывать общий интеграл по формуле (4.20).

Пример 9. Найти решение уравнения

$$y(1 + yx)dx + (\frac{1}{2}x^2y + y + 1)dy = 0. \tag{4.21}$$

Решение. Разобьем уравнение на две группы:

$$\left(y(1 + xy)dx + \frac{1}{2}x^2ydy\right) + (y + 1)dy = 0.$$

Для первой из них $\mu_1 = \frac{1}{y}$, $U_1 = x + \frac{1}{2}x^2y$. Вторая группа представляет собой полный дифференциал, так что $\mu_2 = 1$, $U_2 = \frac{y^2}{2} + y$. Равенство (4.19) примет вид

$$\frac{1}{y}\varphi_{\left(x+\frac{1}{2}x^2y\right)} = 1 \cdot \psi_{\left(\frac{y^2}{2}+y\right)}. \tag{4.22}$$

Функцию φ нужно подобрать так, чтобы левая часть этого равенства стала функцией, зависящей только от y. Поэтому нужно положить $\varphi(U_1) = \text{const}$, например $\varphi(U_1) = 1$. Далее, учитывая замечание (1), для удобства подбора функции ψ заменим интеграл U_2 интегралом $\widehat{U}_2 = y$. Тогда равенство (4.19) можно переписать в виде $\frac{1}{y} = \psi(y)$, поэтому интегрирующий множитель уравнения (4.21) будет $\mu = \frac{1}{y}$. Умножая обе части уравнения (4.21) на $\mu = \frac{1}{y}$, получаем уравнение в полных дифференциалах

$$(1 + xy)dx + \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Интегрируя его, находим

$$U = x + \frac{x^2}{2}y + y + \varphi(y); \quad \varphi'(y) = 1 + \frac{1}{y} \Rightarrow \varphi(y) = y + \ln y.$$

Общим интегралом уравнения (4.21) будет

$$x + \frac{x^2}{2}y + y + \ln y = C.$$

Найти общие решения уравнений:

46. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0.$

47. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0.$

48. $xe^x + \frac{y}{x^2} - \frac{y'}{x} = 0.$

49. $(y^3+\cos x)dx+(3xy^2+e^y)dy=0.$

50. $xdx+ydy=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$

51. $\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+(x^2+y^2)dy=0.$

52. $y(1+xy)=xy'.$

53. $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0.$

54. $(y-\frac{1}{x})dx+\frac{dy}{y}=0.$

55. $y(x^2-y+1)dx+x(x^2+1)dy=0.$

Ответы: 46. $\frac{x^3}{3}+xy^2+x^2=C$. **47.** $4y\ln x+y^4=C$. **48.** $y=x^2e^x-xe^x+Cx$. **49.** $xy^3+\sin x+e^y=C$. **50.** $x^2+y^2-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$. **51.** $ye^x\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)=C$. **52.** $\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C$. **53.** $2x+\ln(x^2+y^2)=C$. **54.** $(x^2-C)y=2x$. **55.** $-y+1=xy(\operatorname{arctg}x+C)$.

Глава 5. Уравнения, не разрешенные относительно производной

В данной главе рассматриваются способы решения уравнений 1 – го порядка, не разрешенные относительно производной:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{5.1}$$

5.1 Дифференциальные уравнения 1 – го порядка высших степеней

Если уравнение (5.1) второй степени относительно y', то, разрешая это уравнение относительно y', получим два уравнения:

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y). \tag{5.2}$$

Общий интеграл уравнения (5.1) имеет вид

$$\Phi(x, y, C) \equiv \Phi_1(x, y, C)\Phi_2(x, y, C) = 0, \tag{5.3}$$

где Φ_1 и Φ_2 – общие интегралы уравнений (5.2).

Для уравнения (5.1) может существовать *особый интеграл (особое решение)*. Геометрически особый интеграл представляет собой огибающую семейства кривых (5.3) и может быть получен в результате исключения константы C из системы уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi'_C(x, y, C) = 0 \tag{5.4}$$

или в результате исключения $p = y'$ из системы уравнений

$$F(x, y, p) = 0, \quad F'_p(x, y, p) = 0. \tag{5.5}$$

Пример 10. Найти решение уравнения

$$xy'^2 + 2xy' - y = 0. \tag{5.6}$$

Решение. Решая квадратное уравнение относительно y', имеем два однородных уравнения:

$$y' = -1 + \sqrt{1 + y/x}, \quad y' = -1 - \sqrt{1 + y/x},$$

определенных в области $x(x+y) > 0$, общие интегралы которых

$$(2x + y - C) - 2\sqrt{x^2 + xy} = 0, \quad (2x + y - C) + 2\sqrt{x^2 + xy} = 0.$$

Перемножая, получаем общий интеграл данного уравнения

$$(y - C)^2 = 4Cx$$

(семейство парабол). Дифференцируя общий интеграл по C, получим систему уравнений

$$(y - C)^2 = 4Cx, \quad C - y = 2x.$$

Исключим C, найдем особый интеграл $x + y = 0$. Проверка показывает, что $x + y = 0$ есть решение данного уравнения.

5.2 Метод введения параметра

Пусть уравнение (5.1) разрешимо относительно переменной x, тогда

$$x = f(y, y'). \tag{5.7}$$

Если ввести параметр $p = \frac{dy}{dx}$, то получим $x = f(y, p)$. Возьмём полный дифференциал

$$dx = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp.$$

Сделаем замену $dx = \frac{dy}{p}$. В результате получим систему уравнений

$$\frac{dy}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp, \quad x = f(y, p), \tag{5.8}$$

из которой определяется решение уравнения (5.7) в параметрическом виде:

$$y = \varphi(p, C), \quad x = f(\varphi(p, C), p). \tag{5.9}$$

Исключив параметр p, получим общий интеграл

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{5.10}$$

Если уравнение (5.1) разрешимо относительно переменной y,

$$y = f(x, y'), \tag{5.11}$$

то система уравнений выглядит иначе:

$$p dx = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp, \quad y = f(x, p). \tag{5.12}$$

Пример 11. Найти решение уравнения

$$y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}. \tag{5.13}$$

Решение. Вводим параметр $y' = p$:

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}. \tag{5.14}$$

Найдем полный дифференциал

$$dy = 2pdp - xdp - pdx + xdx.$$

Сделаем замену $dy = pdx$ и сгруппируем слагаемые так, что

$$(2p - x)(dp - dx) = 0.$$

Отсюда два следствия:
1. $dp - dx = 0 \Rightarrow p = x + C$. Получим решение в параметрическом виде

$$\left\{ \begin{array}{l} y = p^2 - xp + x^2/2, \\ p = x + C. \end{array} \right. \tag{5.15}$$

Исключая параметр p, имеем общее решение:

$$y = x^2/2 + Cx + C^2. \tag{5.16}$$

Найдем особое решение:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x^2/2 + Cx + C^2, \\ \frac{\partial y}{\partial C} = \frac{\partial}{\partial C}\left(x^2/2 + Cx + C^2\right). \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x^2/2 + Cx + C^2, \\ 0 = x + 2C. \end{array} \right. \tag{5.17}$$

Исключая C, получаем функцию вида $y = x^2/4$. Непосредственная подстановка этой функции в исходное уравнение (5.13) обращает его в тождество, следовательно, функция $y = x^2/4$ является особым решением.
2. $2p - x = 0 \Rightarrow p = x/2$. Отсюда

$$\left\{ \begin{array}{l} y = p^2 - xp + x^2/2, \\ p = x/2. \end{array} \right. \tag{5.18}$$

Как видим, $y = x^2/4$ то же самое особое решение.

Найти общие решения уравнений:

56. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$.

57. $y'^2 + \frac{x}{y}y' + 1 = 0$.

58. $y = xy'^2 - 2y'^3$.

59. $x = y'\sqrt{y'^2+1}$.

60.$yy'^2 - 2xy' + y = 0$.

61. $2xy' - y = y'\ln yy'$.

Ответы: 56. $y = Ce^x$; $y = Ce^{-x} + x - 1$. **57.** $(x^2C^2 + 1 - 2Cy)(x^2 + C^2 - 2Cy) = 0$; особый интеграл $x^2 - y^2 = 0$. **58.** $\begin{cases} y = xp^2 - 2p^3, \\ x = \frac{2p^3-3p^2+C}{(1-p)^2} \end{cases}$, $y = x - 2$; Особое решение $y = 0$. **59.** $\begin{cases} y = \frac{2(p^2+1)^{3/2}}{3} - (p^2+1)^{1/2} + C, \\ x = p\sqrt{p^2+1}. \end{cases}$ **60.** $y^2 + C^2 = 2Cx$; особый интеграл $x^2 - y^2 = 0$. **61.** $y^2 = 2Cx - C\ln C$; особый интеграл $2x = 1 + 2\ln|y|$.

5.3 Уравнения Лагранжа и Клеро

Определение 5.1. Дифференциальные уравнения вида

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \tag{5.19}$$

называются уравнением Лагранжа.

При помощи введения параметра $y' = p$ уравнение (5.19) сводится к линейному относительно x:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \Rightarrow pdx = \varphi(p)dx + \left(x\varphi_p'(p) + \psi_p'(p)\right)dp \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{x\varphi_p'(p) + \psi_p'(p)}{p - \varphi(p)}$$

– линейное уравнение. $p - \varphi(p) = 0$ – потерянное решение. Особое решение находится обычным приемом.

Определение 5.2. Если в уравнении (5.19) $\varphi(y') = y'$, то получаем уравнение Клеро

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{5.20}$$

Пример 12. Найти решение уравнения

$$y = 2y'x + 1/y'. \tag{5.21}$$

Решение. Полагаем $y' = p$, тогда $y = 2px + 1/p$. Дифференцируя и заменяя dy на pdx, получим $pdx = 2pdx + 2xdp - dp/p^2$ или $dx/dp = -2p/x + 1/p^3$. Решив это уравнение, будем иметь

$$x = \frac{1}{p^2}(\ln p + C).$$

Следовательно, общий интеграл будет

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^2}(\ln p + C), \\ y = 2px + 1/p. \end{cases} \tag{5.22}$$

Для нахождения особого интеграла по общему правилу составляем систему

$$y = 2px + 1/p, \quad \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{\partial(2px + 1/p)}{\partial p} \quad \Rightarrow y = 2px + 1/p, \quad 0 = 2x - 1/p^2.$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{2p^2}, \quad y = 2/p$$

и, следовательно,

$$y = \pm 2\sqrt{2}x.$$

Подставляя y в уравнение (5.21), убеждаемся, что полученная функция не является решением и, следовательно, уравнение (5.21) не имеет особого интеграла.

Найти общие решения уравнений:

62. $2y = x\left(y' + \frac{4}{y'}\right)$.

63. $y = y' + \sqrt{1 - y'^2}$.

64.$y'^3 = 3(xy' - y)$.

65. $y = xy' + y'^2$.

66. $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

Ответы: 62. $y = C + \frac{x^2}{C}$; особый интеграл $y = \pm x$. **63.** $\begin{cases} x = \ln|p| - \arcsin p + C, \\ y = p + \sqrt{1 - p^2}. \end{cases}$ **64.** $C^3 = 3(Cx - y)$; особый интеграл $9y^2 = 4x^3$. **65.** $y = Cx + C^2$; особый интеграл $y = -\frac{x^2}{4}$. **66.** $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$; особый интеграл $x^2 + y^2 = 1$.

5.4 Неполные уравнения

Определение 5.3. Дифференциальные уравнения вида

$$F(y') = 0, \quad F(y, y') = 0, \quad F(x, y') = 0 \tag{5.23}$$

называются неполными.

Если уравнение имеет вид $F(y') = 0$, то общий интеграл – $F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$.

Как правило, уравнения (5.23) могут быть решены с помощью параметризации. Параметризуем уравнение $F(x, y') = 0$

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y' = \psi(t). \end{cases} \tag{5.24}$$

Отсюда $dy = \psi(t)dx = \psi(t)\varphi_t'(t)dt \Rightarrow y = \int \psi(t)\varphi_t'(t)dt + C$. Таким образом, получаем решение в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\varphi_t'(t)dt + C. \end{cases} \tag{5.25}$$

Аналогично для уравнения $F(y, y') = 0$:

$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ y' = \psi(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy = \varphi(t)_t' dt, \\ dy = \psi(t)dx \end{cases} \tag{5.26}$$

Исключаем из системы dy

$$dx = \frac{\varphi_t'(t)dt}{\psi(t)}. \tag{5.27}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ x = \int \frac{\varphi_t'(t)dt}{\psi(t)} + C. \end{cases} \tag{5.28}$$

Возникает вопрос: как найти параметризацию исходного уравнения? Можно выделить несколько частных случаев.

1. Пусть уравнение, например, имеет вид

$$ax^\alpha + by'^\beta = c,$$

где a, b, c, α и β – постоянные. В этом случае используются тригонометрические формулы

$$\begin{cases} \sin^2 t + \cos^2 = 1, \\ \dfrac{1}{\cos^2 t} - \operatorname{tg}^2 t = 1. \end{cases} \tag{5.29}$$

Если $a > 0$, $b > 0$, то делается замена

$$\begin{cases} ax^\alpha = c\cos^2 t, \\ by'^\beta = c\sin^2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \left(\dfrac{c}{a}\cos^2 t\right)^{1/\alpha}, \\ y' = \left(\dfrac{c}{b}\sin^2 t\right)^{1/\beta}. \end{cases} \tag{5.30}$$

Пример 13. Найти решение уравнения

$$y'^2 + x^2 = 1.$$

Решение. Параметризуем уравнение

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y' = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\sin t dt, \\ dy = \sin t dx. \end{cases} \tag{5.31}$$

Подставим dx из первого уравнения системы (5.31) во второе:

$$dy = \sin t dx = -\sin^2 t dt \Rightarrow y = \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{t}{2} + C.$$

Получаем решение в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{t}{2} + C. \end{cases} \tag{5.32}$$

2. Уравнение содержит $\sqrt{a^2 \pm y'^2}$ или $\sqrt{a^2 \pm x^2}$, тогда параметризация достигается тригонометрической или гиперболической заменой.

Пример 14. Параметризовать уравнение

$$y' \operatorname{ctg} x = \sqrt{a^2 - y'^2}.$$

Решение. Делаем замену $y' = a \sin t$. Исходное уравнение примет вид $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} t$. Отсюда,

$$\begin{cases} x = t, \\ y' = a \sin t. \end{cases} \tag{5.33}$$

3. Уравнение вида

$$P(x, y') + Q(x, y') + R(x, y') = 0,$$

где P, Q, R – однородные функции измерения m, $m+1$, $m+2$, соответственно. Используем подстановку $y' = tx$:

$$x^2 R(1, t) + xQ(1, t) + R(1, t) = 0.$$

Получили квадратное уравнение относительно x. Если существуют вещественные решения $x = \omega(t)$, имеем параметризацию

$$\begin{cases} x = \omega(t), \\ y' = tx = t\omega(t). \end{cases} \tag{5.34}$$

Если P, Q, R – функции аргументов y и y', то делаем замену $y' = ty$.

4. Уравнение вида

$$P(x, y') + Q(x, y') = 0,$$

где P, Q – однородные функции измерения m и n, соответственно. Пусть $n > m$. Используем подстановку $y' = tx$:

$$x^m P(1, t) + x^n Q(1, t) = 0 \Rightarrow x = \left(-\frac{P(1, t)}{Q(1, t)}\right)^{1/(n-m)}.$$

Параметризация:

$$\begin{cases} x = \left(-\frac{P(1,t)}{Q(1,t)}\right)^{1/(n-m)}, \\ y' = tx. \end{cases} \tag{5.35}$$

Пример 15. Параметризовать уравнение

$$x^4 + y'^4 - 2x^2y' = 0.$$

Решение. Выражение $x^4 + y'^4$ есть однородная функция 4 – го порядка, $2x^2y'$ – однородная функция 3 – го порядка. Делаем замену

$$y' = tx, \tag{5.36}$$

тогда

$$x^4 + t^4x^4 - 2x^2tx = 0 \Rightarrow x = \frac{2t}{1+t^4}. \tag{5.37}$$

Подставляем (5.37) в замену (5.36) и, таким образом, параметризуем уравнение

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^4}, \\ \frac{dy}{dx} = \frac{2t^2}{1+t^4}. \end{cases} \tag{5.38}$$

5. Если левая часть уравнений $F(x, y') = 0$ ($F(y, y') = 0$) есть многочлены по x и y' (y и y'), тогда $F(x, p) = 0$ ($F(y, p) = 0$) — уравнение алгебраической кривой, где $y' = p$. Находим узловую точку из системы

$$\begin{cases} F'_x(x, p) = 0, \\ F'_p(x, p) = 0. \end{cases} \Rightarrow x = a, p = b. \tag{5.39}$$

Переносим начало координат в эту точку, сделав замену $x_1 = x - a, p_1 = p - b$. В результате могут получиться уравнения, рассмотренные в пунктах **3** и **4**.

Пример 16. Параметризовать уравнение

$$y^2y' - y^2 - y'^2 + 4y' - 4 = 0.$$

Решение. Водим параметр $y' = p$:

$$F(y, p) \equiv py^2 - y^2 - p^2 + 4p - 4 = 0. \tag{5.40}$$

Находим узловую точку из системы уравнений

$$\begin{cases} F'_y(x, p) \equiv 2py - 2y = 0, \\ F'_p(x, p) \equiv y^2 - 2p + 4 = 0. \end{cases} \tag{5.41}$$

Как видно из системы, имеется несколько узловых точек. Выберем точку $y = 0, p = 2$. Переходим к новым переменным $y_1 = y, p_1 = p - 2$. Уравнение (5.40) примет вид

$$p_1 y_1^2 + y_1^2 - p_1^2 = 0.$$

Функция $p_1 y_1^2$ — однородная функция 3 порядка, $y_1^2 - p_1^2$ — однородная функция 2 порядка, следовательно, делаем замену $p_1 = ty$:

$$t y_1 y_1^2 + y_1^2 - t^2 y_1^2 = 0.$$

Отсюда

$$y_1 = \frac{t^2-1}{t} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{t^2-1}{t}, \\ p_1 = t^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{t^2-1}{t}, \\ p = t^2 + 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{t^2-1}{t}, \\ \frac{dy}{dx} = t^2 + 1. \end{cases} \qquad (5.42)$$

Найти общие решения уравнений:

67. $y' - \sin y' = 0.$

68. $y^{2/5} + y'^{2/5} = a^{2/5}.$

69. $y'^3 - x^3(1 - y') = 0.$

70. $y^4 - y'^4 - yy'^2 = 0.$

71. $y'^3 - 2y'^2 - x^2 + y' + 2x - 1 = 0.$

72. $y^2 y' - y^2 - y'^2 + 4y' - 4 = 0.$

Ответы:

67. $(y - C)/x - \sin[(y - C)/x] = 0.$

68. $\begin{cases} y = a\cos^5 t, \\ x = \frac{5}{3}\operatorname{ctg}^3 t - 5\operatorname{ctg} t - 5t + C. \end{cases}$

69. $\begin{cases} y = -t^2/2 + \frac{2t^5}{5} + 1/t + C, \\ x = 1/t - t^2. \end{cases}$

70. $y = 0,$ $\begin{cases} y = \frac{t^2}{1-t^4}, \\ x = -2/t - \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - 2\operatorname{arctg} t + C. \end{cases}$

71. $\begin{cases} y = \frac{3}{5t^5} - \frac{1}{3t^3} + C, \\ x = 1/t^3 - 1/t + 1. \end{cases}$

72. $\begin{cases} y = t - \frac{1}{t}, \\ x = -1/t + C. \end{cases}$

Литература

[1] Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск.: Изд. Виша шк. 1980.

[2] А. М. Самойленко, С. А. Кривошея , Н. А. Перестюк. Дифференциальные уравнения: Примеры и задачи. Киев.: Изд. Виша шк. 1984.

[3] Филиппов А. Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.; Ижевск.: Изд. РХД, 2000.

[4] Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Изд. "Едиториал УРСС", 2004.

[5] Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. М.: Изд. УРСС, 2002.

[6] А. А. Есипов, Л. И Сазанов, В. И. Юдович. Руководство к решению по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ростов- на-Дону: Изд. Ростовского университета, 1989.