1 Общая теория

Линейная система с постоянными коэффициентами:

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t)\\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t)\end{array}\right. \tag{1}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} = const, \qquad F = \begin{pmatrix} f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\dot{X} = AX + F \tag{3}$$

$F = 0$: однородная система

$$\dot{X} = AX \tag{4}$$

$$\dot{X}_1 = AX_1, \qquad \dot{X}_2 = AX_2 \quad \Longrightarrow \quad X = \alpha X_1 + \beta X_2 \tag{5}$$

Общее решение однородной системы:

$$X = C_1X_1 + \ldots + C_nX_n, \tag{6}$$

где $X_1, \ldots, X_n$ - частные решения.

Ищем решения в виде

$$X = ve^{\lambda t}, \qquad v = \begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix} = const \tag{7}$$

$$\dot{X} = \lambda ve^{\lambda t} = Ave^{\lambda t}, \quad Ave^{\lambda t} - \lambda ve^{\lambda t} = 0, \quad Av - \lambda Ev = 0, \tag{8}$$

$$(A - \lambda E)\,v = 0, \quad \det(A - \lambda E) = 0. \tag{9}$$

2 Кратность 1

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$. Частные:

$$X_1 = v_1e^{\lambda_1 t}, \qquad \ldots \qquad X_n = v_ne^{\lambda_n t}, \tag{10}$$

Общее:

$$X = C_1v_1e^{\lambda_1 t} + \ldots + C_nv_ne^{\lambda_n t} \tag{11}$$

№787

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x} = x - y\\ \dot{y} = y - 4x\end{array}\right. \tag{12}$$

$$X = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ -4 & 1\end{pmatrix}. \tag{13}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1\\ -4 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

$$(\lambda - 1)^2 - 4 = 0, \qquad \lambda = 1 \pm 2 \tag{15}$$

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 3 \tag{16}$$

1) $\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix} = 0, \qquad \left\{\begin{array}{l} 2a - b = 0,\\ -4a + 2b = 0,\end{array}\right. \qquad b = 2a, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix} \tag{17}$$

2) $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1\\ -4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix} = 0, \qquad \left\{\begin{array}{l} -2a - b = 0,\\ -4a - 2b = 0,\end{array}\right. \qquad b = -2a, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1\\ -2\end{pmatrix} \tag{18}$$

$$X = C_1\begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix}e^{-t} + C_2\begin{pmatrix} 1\\ -2\end{pmatrix}e^{3t} \tag{19}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t},\\ y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}.\end{array}\right. \tag{20}$$

(786, 788)

3 Комплексный корень

Выбираем одно из $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

$$(A - \lambda E)\, v_c = 0, \quad X_c = v_c e^{\lambda t} \tag{21}$$

$$X_1 = \mathrm{Re} X_c, X_2 = \mathrm{Im} X_c \tag{22}$$

№790

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases} \tag{23}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{25}$$

$$(\lambda - 1)^2 + 9 = 0, \qquad \lambda = 1 \pm 3i \tag{26}$$

$$\lambda_1 = 1 + 3i, \qquad \lambda_2 = 1 - 3i \tag{27}$$

Возьмём λ_2:

$$\begin{pmatrix} 3i & -3 \\ 3 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \qquad \begin{cases} 3ia - 3b = 0, \\ 3a + 3ib = 0, \end{cases} \qquad b = ia, \qquad v_c = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$X_c = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1-3i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^t (\cos 3t - i \sin 3t) = \begin{pmatrix} \cos 3t - i \sin 3t \\ i \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} e^t + i \begin{pmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} e^t \tag{29}$$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} e^t \tag{30}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^t \cos 3t - C_2 e^t \sin 3t, \\ y = C_1 e^t \sin 3t + C_2 e^t \cos 3t. \end{cases} \tag{31}$$

(789)

4 Кратный корень с равными кратностями

λ - корень кратности k. Можно найти лин. независимые принадлежащие ему $v_1 \dots v_m$. m - *геометрическая кратность*; k- *алгебраическая*. Пусть $m = k$:

$$X_1 = v_1 e^{\lambda t}, \qquad \dots \qquad X_k = v_k e^{\lambda t}, \tag{32}$$

$$X = C_1 X_1 + \dots + C_k X_k + \dots \tag{33}$$

№804

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases} \tag{34}$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 3 \tag{35}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \qquad \begin{cases} 2a - b - c = 0 \\ a - c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} c = a \\ b = a \end{cases}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \qquad a - b - c = 0 \ \times 3, \qquad a = b + c, \qquad v_{2,3} = \begin{pmatrix} b + c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c \tag{38}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \tag{40}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{3t} \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ z = C_1 e^{2t} + C_3 e^{3t} \end{cases} \tag{41}$$

(805)

5 Кратный корень с неравными кратностями

λ - корень $k < m$,

$$X = \begin{pmatrix} P^1_{k-m}(t) \\ \vdots \\ P^n_{k-m}(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t} \tag{42}$$

№794

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases} \tag{43}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{45}$$

$$(\lambda+3)(\lambda-1) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = -1 \tag{46}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \qquad \begin{cases} -2a + 2b = 0, \\ -2a + 2b = 0, \end{cases} \qquad b = a, \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a \tag{47}$$

$k = 2$, $m = 1$, $k - m = 1$

$$X = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix} e^{-t}, \qquad \begin{cases} x = (at+b)\,e^{-t} \\ y = (ct+d)\,e^{-t} \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dot{x} = -(at+b-a)\,e^{-t} \\ \dot{y} = -(ct+d-c)\,e^{-t} \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{cases} -(at+b-a)\,e^{-t} = 2(ct+d)\,e^{-t} - 3(at+b)\,e^{-t} \\ -(ct+d-c)\,e^{-t} = (ct+d)\,e^{-t} - 2(at+b)\,e^{-t} \end{cases} \tag{49}$$

$$\begin{cases} -at - b + a = 2ct + 2d - 3at - 3b \\ -ct - d + c = ct + d - 2at - 2b \end{cases} \tag{50}$$

$$\begin{cases} 2at - 2ct = -a - 2b + 2d \\ 2at - 2ct = -2b - c + 2d \end{cases} \tag{51}$$

$$\begin{cases} -a - 2b + 2d = 0 \\ -2b - c + 2d = 0 \\ 2a - 2c = 0 \\ 2a - 2c = 0 \end{cases} \tag{52}$$

$$\begin{cases} a + 2b - 2d = 0 \\ 2b + c - 2d = 0 \\ a = c \end{cases} \tag{53}$$

$$a = c = -2b + 2d, \qquad X = \begin{pmatrix} (-2b+2d)\,t + b \\ (-2b+2d)\,t + d \end{pmatrix} e^{-t} = b \begin{pmatrix} -2t+1 \\ -2t \end{pmatrix} e^{-t} + d \begin{pmatrix} 2t \\ 2t+1 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{54}$$

$b \equiv C_1$, $d \equiv C_2$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} -2t+1 \\ -2t \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 2t \\ 2t+1 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{55}$$

$$\begin{cases} x = -C_1(2t-1)\,e^{-t} + 2C_2te^{-t}, \\ y = -2C_1te^{-t} + C_2(2t+1)\,e^{-t}. \end{cases} \tag{56}$$

(792)