Полиномы:

$$P_m(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad Q_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

Деление с остатком:

$$P_m(x) = Q_n(x) R_{m-n}(x) + r_l(x), \quad l < n \tag{2}$$

$R_{m-n}(x)$ - частное, $r_l(x)$ - остаток. $r_l(x) = 0$ - $P_m(x)$ на $Q_n(x)$ делится нацело.

$P_m(b) = 0$: b - корень.

$$P_m(x) = (x-b) R_{m-1}(x) + r_0 \tag{3}$$

$$P_m(b) = 0 = (b-b) R_{m-1}(x) + r_0 = r_0 \tag{4}$$

$$P_m(x) = (x-b) R_{m-1}(x) \tag{5}$$

$$P_m(x) = (x-b)^2 R_{m-2}(x) = \ldots = (x-b)^k R_{m-k}(x) \tag{6}$$

k - кратность корня b.

Если $\delta + i\gamma$ - корень, то $\delta - i\gamma$ - тоже корень. Кратность равна.

$$P_m(x) = (x - \delta - i\gamma)^k (x - \delta + i\gamma)^k R_{m-2k}(x) = \left[(x-\delta)^2 - (i\gamma)^2\right]^k R_{m-2k}(x) =$$

$$= \left(x^2 - 2x\delta + \delta^2 + \gamma^2\right)^k R_{m-2k}(x) \tag{7}$$

В итоге

$$P_m(x) = (x-b_1)^{p_1} \ldots (x-b_i)^{p_i} \left(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1\right)^{q_1} \ldots \left(x^2 + \alpha_j x + \beta_j\right)^{q_j} \tag{8}$$

$$p_1 + \ldots + p_i + 2(q_1 + \ldots + q_j) = m \tag{9}$$

Интеграл рац. функции:

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx \tag{10}$$

$m \geqslant n$ (неправильная дробь):

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{r_l(x)}{Q_n(x)}, \qquad l < n \tag{11}$$

$m < n$ (правильная дробь): метод неопределённых коэффициентов

$$Q_n(x) = (x-b_1)^{p_1} \ldots (x-b_i)^{p_i} \left(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1\right)^{q_1} \ldots \left(x^2 + \alpha_j x + \beta_j\right)^{q_j} \tag{12}$$

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \ldots + \ldots \tag{13}$$

1)

$$(x-b) \quad \longrightarrow \quad \frac{A}{x-b} \tag{14}$$

2)

$$(x-b)^k \quad \longrightarrow \quad \frac{A_1}{x-b} + \frac{A_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-b)^k} \tag{15}$$

3)

$$\left(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1\right) \quad \longrightarrow \quad \frac{Ax + B}{x^2 + \alpha_1 x + \beta_1} \tag{16}$$

4)

$$\left(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1\right)^{q_1} \quad \longrightarrow \quad \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + \alpha_1 x + \beta_1} + \ldots + \frac{A_1 x + B_1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} \tag{17}$$

№ 1877

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} \tag{18}$$

Разложим

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2+1} = \frac{A\left(x^2+1\right) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}. \tag{19}$$

числители:

$$A\left(x^2+1\right) + (Bx+C)(x+1) = 1, \tag{20}$$

$$Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C = 1, \tag{21}$$

$$(A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C) = 1. \tag{22}$$

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ B + C = 0, \\ A + C = 1. \end{cases} \tag{23}$$

$$\left\{\begin{array}{c} B=-\frac{1}{2}, \\ C=\frac{1}{2}, \\ A=\frac{1}{2}; \end{array}\right. \tag{24}$$

тогда по (19)

$$\frac{1}{(x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x^2+1}\right], \tag{25}$$

$$\int\frac{dx}{(x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x^2+1}\right]dx=\frac{1}{2}\left[\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx\right]= \tag{26}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2}arctg\,x+C.$$