$U(x,y)$ – искомая функция
$$aU_{xx} + 2bU_{xy} + cU_{yy} + \Phi(U_x, U_y, U, x, y) = 0 \tag{1}$$

1 Замена переменных

$$\begin{cases} s = s(x,y), \\ t = t(x,y). \end{cases} \tag{2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = s_x \frac{\partial}{\partial s} + t_x \frac{\partial}{\partial t} \tag{3}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = s_y \frac{\partial}{\partial s} + t_y \frac{\partial}{\partial t} \tag{4}$$
$$\begin{aligned} U_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} U_x = \frac{\partial}{\partial x}(s_x U_s + t_x U_t) = s_{xx} U_s + s_x \frac{\partial}{\partial x} U_s + t_{xx} U_t + t_x \frac{\partial}{\partial x} U_t = \\ = s_{xx} U_s + s_x (s_x U_{ss} + t_x U_{st}) + t_{xx} U_t + t_x (s_x U_{ts} + t_x U_{tt}) = \\ = s_x^2 U_{ss} + 2 s_x t_x U_{st} + t_x^2 U_{tt} + s_{xx} U_s + t_{xx} U_t. \end{aligned} \tag{5}$$

Аналогично
$$U_{yy} = s_y^2 U_{ss} + 2 s_y t_y U_{st} + t_y^2 U_{tt} + s_{yy} U_s + t_{yy} U_t. \tag{6}$$

Смешанная производная:
$$\begin{aligned} U_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} U_x = \frac{\partial}{\partial y}(s_x U_s + t_x U_t) = s_{xy} U_s + s_x \frac{\partial}{\partial y} U_s + t_{xy} U_t + t_x \frac{\partial}{\partial y} U_t = \\ = s_{xy} U_s + s_x (s_y U_{ss} + t_y U_{st}) + t_{xy} U_t + t_x (s_y U_{ts} + t_y U_{tt}) = \\ = s_x s_y U_{ss} + (s_x t_y + s_y t_x) U_{st} + t_x t_y U_{tt} + s_{xy} U_s + t_{xy} U_t. \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнение превратится в
$$\bar{a} U_{ss} + 2\bar{b} U_{st} + \bar{c} U_{tt} + \bar{\Phi}(U_s, U_t, U, x, y) = 0, \tag{8}$$

где
$$\bar{a} = a s_x^2 + 2b s_x s_y + c s_y^2 \tag{9}$$
$$\bar{b} = a s_x t_x + b(s_x t_y + s_y t_x) + c s_y t_y \tag{10}$$
$$\bar{c} = a t_x^2 + 2b t_x t_y + c t_y^2 \tag{11}$$
$$\begin{aligned} \bar{\Phi} = \Phi + a(s_{xx} U_s + t_{xx} U_t) + 2b(s_{xy} U_s + t_{xy} U_t) + c(s_{yy} U_s + t_{yy} U_t) = \\ = \Phi + (a s_{xx} + 2b s_{xy} + c s_{yy}) U_s + (a t_{xx} + 2b t_{xy} + c t_{yy}) U_t \end{aligned} \tag{12}$$

2 Дискриминант положительный

Зачем всё это:
$$\bar{a} = 0 \tag{13}$$
$$a s_x^2 + 2b s_x s_y + c s_y^2 = 0 \,\Big|\, \frac{1}{s_y^2} \tag{14}$$
$$a\left(\frac{s_x}{s_y}\right)^2 + 2b \frac{s_x}{s_y} + c = 0 \tag{15}$$
$$\frac{s_x}{s_y} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{16}$$
$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \qquad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{17}$$
$$\frac{s_x}{s_y} = \lambda_1 \implies s_x - \lambda_1 s_y = 0 \tag{18}$$

линейное уравнение в частных производных 1-го порядка
$$dx = \frac{dy}{-\lambda_1} \implies \varphi(x,y) = C \tag{19}$$
$$s = \varphi(x,y) \tag{20}$$

Но если $b^2 - ac > 0$ есть ещё λ_2, а (9) аналогично (11).
$$dx = \frac{dy}{-\lambda_2} \implies \psi(x,y) = C \tag{21}$$
$$t = \psi(x,y) \implies \bar{c} = 0 \tag{22}$$
$$U_{st} + \frac{1}{2\bar{b}} \bar{\Phi} = 0, \tag{23}$$

Такие уравнения называются уравнениями гиперболического типа.

Осталось два варианта: $b^2 - ac = 0$ и $b^2 - ac < 0$.

3 Дискриминант отрицательный

Пусть $b^2 - ac < 0$.

Тогда $\lambda = \alpha \pm i\beta$, что $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ (для $\lambda = \alpha - i\beta$ получается аналогично):

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = a(\alpha + i\beta)^2 + 2b(\alpha + i\beta) + c = a\left(\alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2\right) + 2b(\alpha + i\beta) + c = 0. \tag{24}$$

Если разложить

$$\begin{cases} a\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + 2b\alpha + c = 0, \\ a\alpha\beta + b\beta = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Положим теперь, что мы для найденного λ решили уравнение

$$\varphi_x - \lambda\varphi_y = 0, \tag{26}$$

нашли комплексное φ,

$$s = \operatorname{Re}\varphi \qquad t = \operatorname{Im}\varphi \tag{27}$$

$$\varphi = s + it \tag{28}$$

Уравнение (26) приобретает тогда такой вид:

$$s_x + it_x - (\alpha + i\beta)(s_y + it_y) = 0, \tag{29}$$

или

$$s_x + it_x - \alpha s_y + \beta t_y - i\beta s_y - i\alpha t_y = 0. \tag{30}$$

Так как комплексное число равно нулю только тогда, когда нулевыми являются обе его части, мы можем выразить s_x и t_x:

$$\begin{cases} s_x = \alpha s_y - \beta t_y, \\ t_x = \beta s_y + \alpha t_y. \end{cases} \tag{31}$$

Выполним эту подстановку в $\bar{b}$ из (10):

$$\begin{aligned} \bar{b} &= a(\alpha s_y - \beta t_y)(\beta s_y + \alpha t_y) + b\left[(\alpha s_y - \beta t_y)t_y + s_y(\beta s_y + \alpha t_y)\right] + cs_y t_y = \\ &= s_y^2(a\alpha\beta + b\beta) + t_y^2(-a\alpha\beta - b\beta) + s_y t_y\left[a\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + 2b\alpha + c\right] = \\ &= \left(s_y^2 - t_y^2\right)(a\alpha\beta + b\beta) + s_y t_y\left[a\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + 2b\alpha + c\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

Оба слагаемых равны нулю согласно (25), значит, $\bar{b} = 0$:

$$\bar{a}U_{ss} + \bar{c}U_{tt} + \bar{\Phi}(U_s, U_t, U, x, y) = 0 \tag{33}$$

(уравнение эллиптического типа)

4 Дискриминант нулевой

Наконец, $b^2 - ac = 0$

В этом случае s находится из уравнения $s_x - \lambda s_y = 0$, что позволяет заменить $s_x = \lambda s_y$:

$$\bar{b} = a\lambda s_y t_x + b(\lambda s_y t_y + s_y t_x) + cs_y t_y = s_y\left[t_x(a\lambda + b) + t_y(b\lambda + c)\right]. \tag{34}$$

Т.к. $b^2 - ac = 0$,

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = -\frac{b}{a}.$$

Подставив это значение в (34), получим, что

$$\bar{b} = s_y\left[t_x\left(-\frac{ab}{a} + b\right) + t_y\left(-\frac{b^2}{a} + c\right)\right] = s_y\left[t_x(-b + b) - \frac{t_y}{a}\left(b^2 - ac\right)\right] = s_y\left[t_x \cdot 0 - t_y \cdot 0\right] = 0.$$

В итоге

$$U_{tt} + \frac{1}{\bar{c}}\bar{\Phi}(U_s, U_t, U, x, y) = 0 \tag{35}$$

(уравнение параболического типа)

5 Пример: Даишев, Никитин №7

$$U_{xx} - 2\sin x U_{xy} - \cos^2 x U_{yy} - \cos x U_y = 0 \tag{36}$$

$$a = 1, \quad b = -\sin x, \quad c = -\cos^2 x, \quad \Phi = -\cos x U_y \tag{37}$$

$$b^2 - ac = \sin^2 x - \left(-\cos^2 x\right) = 1 > 0 \tag{38}$$

Гиперболическое.

$$\lambda_1 = \sin x - 1, \qquad \lambda_2 = \sin x + 1 \tag{39}$$

$$s_x - \lambda_1 s_y = s_x - (\sin x - 1)\, s_y = 0 \tag{40}$$

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\sin x - 1} \tag{41}$$

$$-(\sin x - 1)\, dx = dy \tag{42}$$

$$\cos x + x - y = C_1 \tag{43}$$

$$s = \cos x + x - y \tag{44}$$

$$s_x = -\sin x + 1, \quad s_y = -1 \tag{45}$$

$$t_x - \lambda_2 t_y = t_x - (\sin x + 1)\, t_y = 0 \tag{46}$$

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\sin x + 1} \tag{47}$$

$$-(\sin x + 1)\, dx = dy \tag{48}$$

$$\cos x - x - y = C_1 \tag{49}$$

$$t = \cos x - x - y \tag{50}$$

$$t_x = -\sin x - 1, \qquad t_y = -1 \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \bar{b} = a s_x t_x + b\,(s_x t_y + s_y t_x) + c s_y t_y = s_x t_x - \sin x\,(s_x t_y + s_y t_x) - \cos^2 x s_y t_y = \\ = (-\sin x + 1)(-\sin x - 1) - \sin x\,(-(-\sin x + 1) - (-\sin x - 1)) - \cos^2 x = \\ = (-\sin x)^2 - 1 - 2\sin^2 x - \cos^2 x = -\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = -2 \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} \Phi = -\cos x U_y = -\cos x\,(U_s s_y + U_t t_y) = \cos x\,(U_s + U_t) \\ \bar{\Phi} = \Phi + (a s_{xx} + 2b s_{xy} + c s_{yy})\, U_s + (a t_{xx} + 2b t_{xy} + c t_{yy})\, U_t = \\ = \cos x\,(U_s + U_t) + s_{xx} U_s + t_{xx} U_t = \cos x\,(U_s + U_t) - \cos x U_s - \cos x U_t = 0 \end{aligned} \tag{53}$$

$$-4U_{st} = 0 \tag{54}$$

$$U = \varphi(s) + \psi(t) = \varphi(\cos x + x - y) + \psi(\cos x - x - y) \tag{55}$$