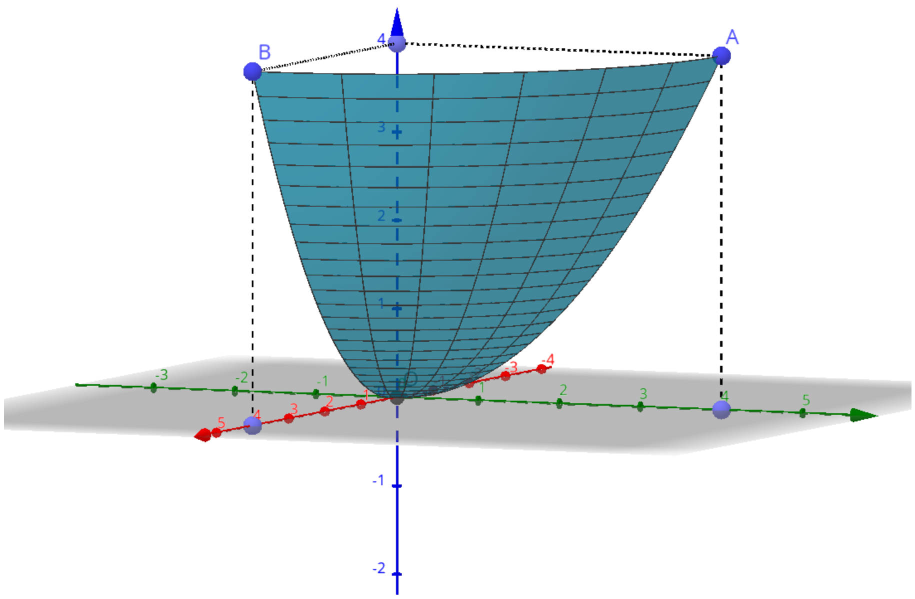
$$Ц = \oint\limits_C \vec{F} \cdot \vec{dl}, \qquad A = \int\limits_{AB} \vec{F} \cdot \vec{dl} \tag{1}$$

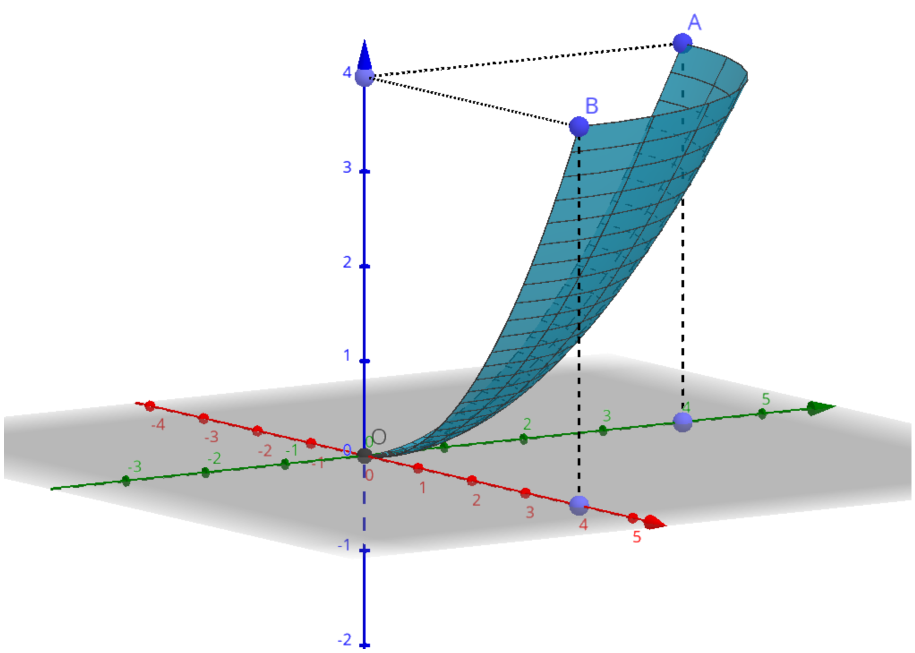
Анчиков, №105

Найти циркуляцию вектора

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

по контуру, вырезаемому в первом октанте из параболоида $x^2 + y^2 = az$ плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = a$ в положительном направлении относительно внешней нормали параболоида.



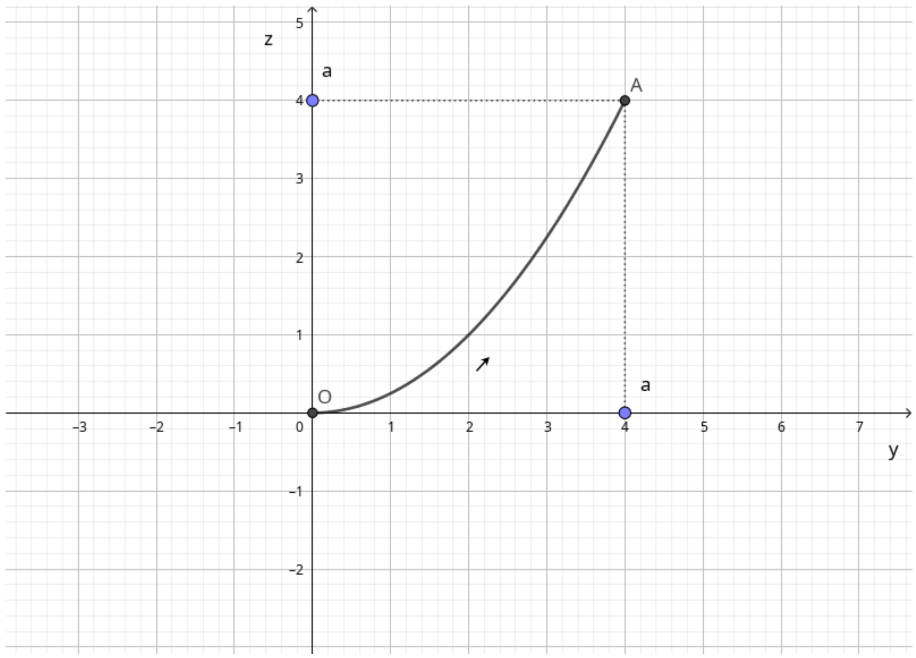


1 Решение в лоб

$$Ц = \oint\limits_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int\limits_{OA} \vec{F} \cdot \vec{dl} + \int\limits_{AB} \vec{F} \cdot \vec{dl} + \int\limits_{BO} \vec{F} \cdot \vec{dl} \tag{3}$$

1.1 OA

$x = 0$, $y^2 = az$, $z = \frac{y^2}{a}$, $0 \leqslant y \leqslant a$



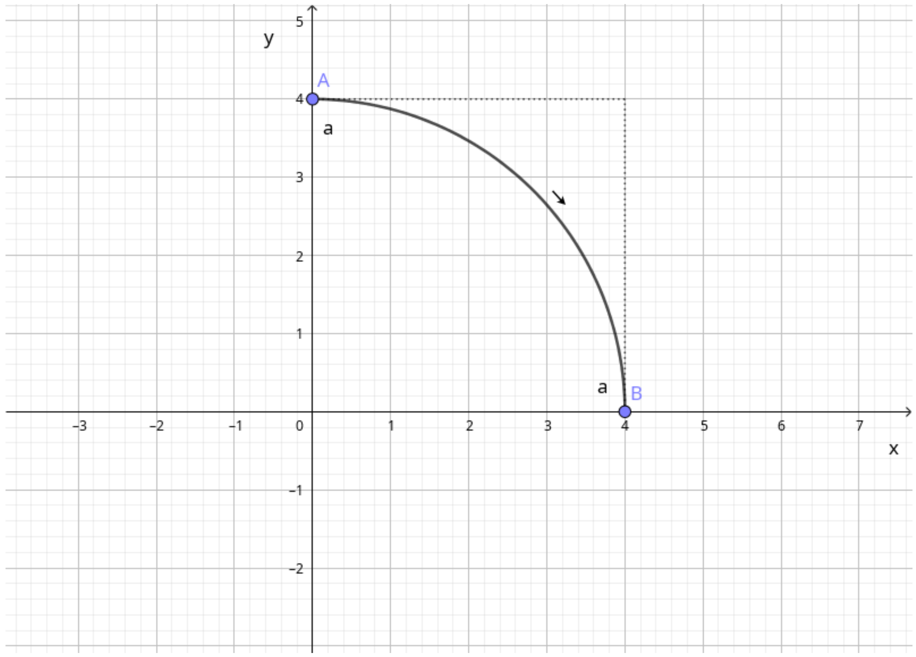
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \\ y^2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ \frac{y^2}{a} \end{pmatrix}, \qquad \vec{dl} = \vec{r}\,'_y dy = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2y}{a} \end{pmatrix} dy \tag{4}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{dl} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2y}{a} \end{pmatrix} dy = \frac{2y^3}{a} dy \tag{5}$$

$$\int\limits_{OA} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int\limits_0^a \frac{2y^3}{a} dy = \left. \frac{2y^4}{4a} \right|_0^a = \frac{a^4}{2a} = \frac{a^3}{2}. \tag{6}$$

1.2 AB

$z = a$, $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$:



$$\left\{ \begin{array}{l} x = a\cos\varphi, \\ y = a\sin\varphi. \end{array} \right. \tag{7}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} : \tag{8}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a\sin t, \\ y = a\cos t. \end{array} \right. \tag{9}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2\cos^2 t \\ a^2 \sin t\cos t \\ a^2 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \sin t\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sin t \\ a\cos t \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{dl} = \vec{r}_t' dy = a \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} dy \tag{11}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{dl} = a^2 \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \sin t\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot a \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} dy = a^3\left(\cos^3 t - \sin^2 t\cos t\right) dt = a^3\left(1 - 2\sin^2 t\right)\cos t dt \tag{12}$$

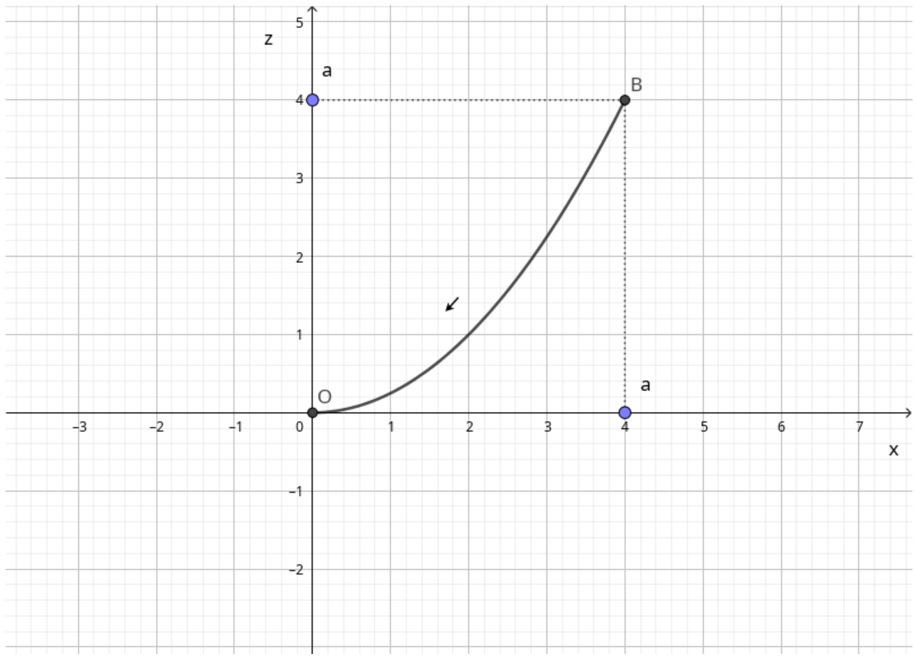
$$\int\limits_{AB} \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int\limits_0^{\pi/2} a^3\left(1-2\sin^2 t\right)\cos t dt = \tag{13}$$

$\sin t = s$

$$= a^3 \int\limits_0^1 \left(1 - 2s^2\right) ds = a^3 \left(s - 2\frac{s^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = a^3\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{a^3}{3}.$$

1.3 BO

$y = 0$, $x^2 = az$, $z = \frac{x^2}{a}$, $0 \leqslant x \leqslant a$



$$x = a - t, \quad 0 \leqslant t \leqslant a, \quad z = \frac{(a-t)^2}{a} \tag{14}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (a-t)^2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} a-t \\ 0 \\ \frac{(a-t)^2}{a} \end{pmatrix}, \qquad \vec{dl} = \vec{r}'_t dt = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{2}{a}(a-t) \end{pmatrix} dt \tag{15}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{dl} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (a-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{2}{a}(a-t) \end{pmatrix} dt = -\frac{2}{a}(a-t)^3\, dt \tag{16}$$

$$\int\limits_{OA} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int\limits_0^a -\frac{2}{a}(a-t)^3\, dt = \frac{2}{a}\left.\frac{(a-t)^4}{4}\right|_0^a = \frac{2}{a}\left[0 - \frac{(a)^4}{4}\right] = -\frac{a^3}{2}. \tag{17}$$

Итого

$$\text{Ц} = \int\limits_{OA} \vec{F} \cdot \vec{dl} + \int\limits_{AB} \vec{F} \cdot \vec{dl} + \int\limits_{BO} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{3}. \tag{18}$$

2 Решение через формулу Стокса

$$\text{Ц} = \oint\limits_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = \iint \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} \tag{19}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \quad az = x^2 + y^2 = \rho^2, \tag{20}$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant a \tag{21}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \frac{\rho^2}{a} \end{pmatrix} \qquad \vec{r}'_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \frac{2\rho}{a} \end{pmatrix} \qquad \vec{r}'_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\overrightarrow{dS} = \left[\vec{r}'_\varphi \times \vec{r}'_\rho\right] d\varphi d\rho = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\rho\sin\varphi & \cos\varphi \\ \vec{j} & \rho\cos\varphi & \sin\varphi \\ \vec{k} & 0 & \frac{2\rho}{a} \end{vmatrix} d\varphi d\rho = \begin{pmatrix} \frac{2\rho^2}{a}\cos\varphi \\ \frac{2\rho^2}{a}\sin\varphi \\ -\rho \end{pmatrix} d\varphi d\rho \tag{23}$$

$$\text{rot }\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \frac{\partial}{\partial x} & y^2 \\ \vec{j} & \frac{\partial}{\partial y} & xy \\ \vec{k} & \frac{\partial}{\partial z} & x^2+y^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ -2x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\rho\sin\varphi \\ -2\rho\cos\varphi \\ -\rho\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\text{rot }\vec{F}\cdot\overrightarrow{dS} = \begin{pmatrix} 2\rho\sin\varphi \\ -2\rho\cos\varphi \\ -\rho\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2\rho^2}{a}\cos\varphi \\ \frac{2\rho^2}{a}\sin\varphi \\ -\rho \end{pmatrix} d\varphi d\rho = \tag{25}$$

$$= \left[\cancel{2\rho\sin\varphi\frac{2\rho^2}{a}\cos\varphi} - \cancel{2\rho\cos\varphi\frac{2\rho^2}{a}\sin\varphi} + \rho^2\sin\varphi\right] d\varphi d\rho = \rho^2\sin\varphi d\varphi d\rho$$

$$Ц = \iint \text{rot }\vec{F}\cdot\overrightarrow{dS} = \int\limits_0^a d\rho \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\rho^2\sin\varphi = \int\limits_0^a \rho^2 d\rho \cdot \int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi = \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^a \cdot \left.(-\cos\varphi)\right|_0^{\pi/2} = \tag{26}$$

$$= \frac{a^3}{3}\left[0-(-1)\right] = \frac{a^3}{3}.$$