

1 Условия задачи

Решить уравнение Лапласа

$$\Delta U = 0 \quad (1)$$

с граничным условием

$$U|_{r=a} = A \sin \varphi \quad (2)$$

а) внутри

б) снаружи окружности $r = a$.

2 Перевод лапласиана в полярные координаты

$$U = U(r, \varphi) \quad U(r, \varphi) = U(r, \varphi + 2\pi) \quad (3)$$

$$U_{xx} = U_{rr}(r_x)^2 + 2U_{r\varphi}r_x\varphi_x + U_{\varphi\varphi}(\varphi_x)^2 + U_r r_{xx} + U_\varphi \varphi_{xx} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (5)$$

Находим производные:

$$\begin{cases} 1 = r_x \cos \varphi - r \sin \varphi \varphi_x \\ 0 = r_x \sin \varphi + r \cos \varphi \varphi_x \end{cases} \quad (6)$$

$$r_x = \cos \varphi \quad (7)$$

$$0 = \cos \varphi \sin \varphi + r \cos \varphi \varphi_x \quad (8)$$

$$\varphi_x = -\frac{\sin \varphi}{r} \quad (9)$$

$$r_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} r_x = \frac{\partial}{\partial x} \cos \varphi = -\sin \varphi \varphi_x = -\sin \varphi \left(-\frac{\sin \varphi}{r}\right) = \frac{\sin^2 \varphi}{r} \quad (10)$$

$$\varphi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \varphi_x = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin \varphi}{r} = -\frac{\cos \varphi}{r} \varphi_x + \frac{\sin \varphi}{r^2} r_x = -\frac{\cos \varphi}{r} \left(-\frac{\sin \varphi}{r}\right) + \frac{\sin \varphi}{r^2} \cos \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \quad (11)$$

Подставляем в

$$\begin{aligned} U_{xx} &= U_{rr}(\cos \varphi)^2 + 2U_{r\varphi} \cos \varphi \left(-\frac{\sin \varphi}{r}\right) + U_{\varphi\varphi} \left(-\frac{\sin \varphi}{r}\right)^2 + U_r \frac{\sin^2 \varphi}{r} + U_\varphi \left(\frac{\sin 2\varphi}{r^2}\right) = \\ &= U_{rr} \cos^2 \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{r} U_{r\varphi} + U_{\varphi\varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} U_r + \frac{\sin 2\varphi}{r^2} U_\varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично

$$U_{yy} = U_{rr} \sin^2 \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{r} U_{r\varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} U_{\varphi\varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} U_r - \frac{\sin 2\varphi}{r^2} U_\varphi \quad (13)$$

В сумме

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = U_{rr} + \frac{1}{r^2} U_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} U_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \frac{1}{r^2} U_{\varphi\varphi} \quad (14)$$

3 Решение уравнения Лапласа в полярных координатах

3.1 Разделение переменных

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \frac{1}{r^2} U_{\varphi\varphi} = 0 \quad (15)$$

$$U(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi) \quad (16)$$

Из (3)

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \quad (17)$$

Подставляем в (15)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r R') \Phi + R \frac{1}{r^2} \Phi'' = 0 \quad \left| \frac{r^2}{R \Phi} \right. \quad (18)$$

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} (r R') = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu, \quad \mu = \text{const} \quad (19)$$

3.2 Угловая часть

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu \quad (20)$$

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0 \quad (21)$$

ХУ:

$$\lambda^2 + \mu = 0 \quad (22)$$

Случай $\mu < 0$: $\mu = -\alpha^2$ $\lambda = \pm\alpha$

$$\Phi = C_1 e^{\alpha\varphi} + C_2 e^{-\alpha\varphi} \quad (23)$$

Из (17)

$$C_1 e^{\alpha\varphi} + C_2 e^{-\alpha\varphi} = C_1 e^{\alpha(\varphi+2\pi)} + C_2 e^{-\alpha(\varphi+2\pi)} \quad (24)$$

Дифференцируем по φ и делим на α :

$$C_1 e^{\alpha\varphi} - C_2 e^{-\alpha\varphi} = C_1 e^{\alpha(\varphi+2\pi)} - C_2 e^{-\alpha(\varphi+2\pi)} \quad (25)$$

Складываем

$$C_1 e^{\alpha\varphi} = C_1 e^{\alpha(\varphi+2\pi)} \quad (26)$$

$$C_1 (e^{2\pi\alpha} - 1) = 0 \quad (27)$$

$$2\pi\alpha \neq 0 \implies C_1 = 0. \quad (28)$$

Из (24) и (28)

$$C_2 e^{-\alpha\varphi} = C_2 e^{-\alpha(\varphi+2\pi)} \quad (29)$$

$$C_2 (1 - e^{-2\pi\alpha}) = 0 \implies C_2 = 0 \quad (30)$$

$$\Phi = 0 \quad (31)$$

Случай $\mu = 0$:

$$\Phi'' = 0 \quad (32)$$

$$\Phi = C_1 \varphi + C_2 \quad (33)$$

$$C_1 \varphi + C_2 = C_1 (\varphi + 2\pi) + C_2 \quad (34)$$

$$2\pi C_1 = 0 \quad (35)$$

$$\Phi = C_2 \quad (36)$$

Случай $\mu > 0$: $\mu = \alpha^2$

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0, \quad \lambda = \pm i\alpha \quad (37)$$

$$\Phi = C_1 \cos(\alpha\varphi) + C_2 \sin(\alpha\varphi) \quad (38)$$

Из (17)

$$C_1 \cos(\alpha\varphi) + C_2 \sin(\alpha\varphi) = C_1 \cos(\alpha[\varphi + 2\pi]) + C_2 \sin(\alpha[\varphi + 2\pi]), \quad (39)$$

$$-2C_1 \sin(\pi\alpha) \sin(\alpha\varphi + \pi\alpha) + 2C_2 \sin(\pi\alpha) \cos(\alpha\varphi + \pi\alpha) = 0, \quad (40)$$

$$\sin(\pi\alpha) \cdot [C_1 \sin(\alpha\varphi + \pi\alpha) - C_2 \cos(\alpha\varphi + \pi\alpha)] = 0. \quad (41)$$

Пусть

$$C_1 \sin(\alpha\varphi + \pi\alpha) - C_2 \cos(\alpha\varphi + \pi\alpha) = 0. \quad (42)$$

Дифференцируем по φ и делим на α :

$$C_1 \cos(\alpha\varphi + \pi\alpha) + C_2 \sin(\alpha\varphi + \pi\alpha) = 0. \quad (43)$$

Умножим 42 на $\sin(\alpha\varphi + \pi\alpha)$, 43 на $\cos(\alpha\varphi + \pi\alpha)$ и сложим:

$$+ \begin{aligned} & C_1 \sin^2(\alpha\varphi + \pi\alpha) - C_2 \cos(\alpha\varphi + \pi\alpha) \sin(\alpha\varphi + \pi\alpha) = 0, \\ & C_1 \cos^2(\alpha\varphi + \pi\alpha) + C_2 \sin(\alpha\varphi + \pi\alpha) \cos(\alpha\varphi + \pi\alpha) = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

$$C_1 = 0 \implies C_2 = 0. \quad (45)$$

Итак,

$$\sin(\pi\alpha) = 0 \quad (46)$$

$$\pi\alpha = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (47)$$

$$\alpha = n, \quad \mu = n^2 \quad (48)$$

$$\Phi_n = C_1^n \cos(n\varphi) + C_2^n \sin(n\varphi) \quad (49)$$

(при $n = 0$ получаем (36), $n = 0, 1, 2, \dots$)

3.3 Радиальная часть

Возьмём левую часть (19):

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} (rR') = \mu = n^2, \quad (50)$$

$$r^2 R'' + rR' = n^2 R. \quad (51)$$

$$r = e^\rho \quad \rho = \ln r$$

$$R' = \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dR}{d\rho}, \quad (52)$$

$$R'' = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dR}{d\rho} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{dR}{d\rho} = -\frac{1}{r^2} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 R}{d\rho^2} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 R}{d\rho^2} - \frac{dR}{d\rho} \right), \quad (53)$$

$$\left(\frac{d^2 R}{d\rho^2} - \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{dR}{d\rho} = n^2 R \quad (54)$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} = n^2 R \quad (55)$$

$$R_n = C_3^n e^{n\rho} + C_4^n e^{-n\rho} = C_3^n r^n + C_4^n r^{-n} \quad (56)$$

4 Решение пункта а)

Внутри, при $r < a$, $C_4^n = 0$.

Подставим (49) и (56) в (16)

$$U_n = (C_5^n \cos(n\varphi) + C_6^n \sin(n\varphi)) r^n. \quad (57)$$

В силу линейности (1),

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} (C_5^n \cos(n\varphi) + C_6^n \sin(n\varphi)) r^n, \quad (58)$$

где $C_5^n = C_1^n \cdot C_3^n$, $C_6^n = C_2^n \cdot C_3^n$.

Найдём C_5^n и C_6^n из (2):

$$U|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} (C_5^n \cos(n\varphi) + C_6^n \sin(n\varphi)) a^n = A \sin \varphi. \quad (59)$$

Это условие выполняется при

$$C_5^n = 0; \quad C_6^1 = \frac{A}{a}; \quad C_6^n = 0, \quad n \neq 1. \quad (60)$$

Тогда

$$U = (C_5^n \cos(n\varphi) + C_6^n \sin(n\varphi)) r^n|_{n=1} = (C_5^1 \cos(\varphi) + C_6^1 \sin(\varphi)) r = \frac{Ar}{a} \sin(\varphi) \quad (61)$$

5 Решение пункта б)

Снаружи, при $r > a$, $C_3^n = 0$,

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} (C_5^n \cos(n\varphi) + C_6^n \sin(n\varphi)) r^{-n}, \quad (62)$$

где $C_5^n = C_1^n \cdot C_4^n$, $C_6^n = C_2^n \cdot C_4^n$. На границе

$$U|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} (C_5^n \cos(n\varphi) + C_6^n \sin(n\varphi)) a^{-n} = A \sin \varphi, \quad (63)$$

что имеет место при

$$C_5^n = 0; \quad C_6^1 = Aa; \quad C_6^n = 0, \quad n \neq 1. \quad (64)$$

Тогда

$$U = \frac{Aa}{r} \sin(\varphi). \quad (65)$$