

1 Экстремумы

Одномерный случай: x_0 - точка максимума, если $\exists \varepsilon > 0$:

$$\forall x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \Rightarrow f(x) < f(x_0). \quad (1)$$

Минимума: $f(x) > f(x_0)$.

Для многих переменных ε -окрестность:

$$(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 < \varepsilon^2 \quad (2)$$

или

$$\begin{cases} |x_1 - x_1^0| < \varepsilon, \\ \dots\dots\dots \\ |x_n - x_n^0| < \varepsilon. \end{cases} \quad (3)$$

Если в ней $f(x_1 \dots x_n) > f(x_1^0 \dots x_n^0)$ - минимум, $f(x_1 \dots x_n) < f(x_1^0 \dots x_n^0)$ - максимум

Условие необходимое:

$$df = 0 : \quad (4)$$

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1 \dots x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f'_{x_n}(x_1 \dots x_n) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Условие достаточное:

$$d^2 f < 0 \quad - \quad \max, \quad (6)$$

$$d^2 f > 0 \quad - \quad \min. \quad (7)$$

№ 3643 найти экстремумы функции

$$u(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z \quad (8)$$

Из (5)

$$\begin{cases} u'_x = 3x^2 + 12y = 0 \\ u'_y = 12x + 2y = 0 \\ u'_z = 2z + 2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$z = -1, y = -6x$:

$$3x^2 - 6 \cdot 12x = 0 \quad (10)$$

$$x(x - 24) = 0 \quad (11)$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 24 \quad (12)$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = -144 \quad (13)$$

Получаем две точки: $A(0, 0, -1)$ и $B(24, -144, -1)$.

$d^2 u$:

$$du = (3x^2 + 12y) dx + (12x + 2y) dy + (2z + 2) dz \quad (14)$$

$$\begin{aligned} d^2 u &= (6x dx + 12 dy) dx + (12 dx + 2 dy) dy + (2 dz) dz = \\ &= 6x (dx)^2 + 24 dx dy + 2 (dy)^2 + 2 (dz)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

А)

$$\begin{aligned} d^2 u|_A &= 24 dx dy + 2 (dy)^2 + 2 (dz)^2 = 2 \left[(dy)^2 + 2 \cdot 6 dx dy + (6 dx)^2 - (6 dx)^2 \right] + 2 (dz)^2 = \\ &= 2 (dy + 6 dx)^2 - 72 (dx)^2 + 2 (dz)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Подставим $dx = 0, dy = 1$ и $dz = 0$, тогда $d^2 u|_A = 2 > 0$. Но если $dx = 1, dy = -6$ и $dz = 0$, то $d^2 u|_A = -72 < 0$.

В)

$$\begin{aligned} d^2 u|_B &= 6 \cdot 24 (dx)^2 + 24 dx dy + 2 (dy)^2 + 2 (dz)^2 = (12 dx)^2 + 2 \cdot 12 dx dy + (dy)^2 + (dy)^2 + 2 (dz)^2 = \\ &= (12 dx + dy)^2 + 2 (dz)^2 > 0, \end{aligned} \quad (17)$$

минимум.

нестрогий экстремум: $d^2 f \geq 0$ или $d^2 f \leq 0$

№ 3623

$$z(x, y) = (x - y + 1)^2 \quad (18)$$

$$dz = 2(x - y + 1)(dx - dy) \quad (19)$$

$$dz = 0, \quad \Rightarrow \quad x - y + 1 = 0$$

$$y = x + 1$$

Решения образуют прямую.

$$d^2z = 2(dx - dy)(dx - dy) = 2(dx - dy)^2 \geq 0 \quad (20)$$

нестрогий минимум.

2 Условные экстремумы

Условные экстремумы $f(x_1, \dots, x_n)$ на подмножестве

[illegible]

1) Составим функцию Лагранжа

$$L = f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m, \quad (22)$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m = \text{const}$$

[illegible]

2)

[illegible]

№3655 Найти экстремумы функции

$$z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad (25)$$

при условии

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (26)$$

функция Лагранжа

$$L = z + \lambda\varphi = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \quad (27)$$

$$dL = \left(\frac{1}{a} + 2x\lambda\right) dx + \left(\frac{1}{b} + 2y\lambda\right) dy + (x^2 + y^2 - 1) d\lambda = 0. \quad (28)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{q} + 2x\lambda = 0 \\ \frac{1}{b} + 2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda a} \\ y = -\frac{1}{2\lambda b} \\ \left(\frac{1}{2\lambda a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda b}\right)^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (30)$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 4\lambda^2 \quad (31)$$

$$4\lambda^2 = \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2} \quad (32)$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{2ab} \quad (33)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \pm \frac{2ab}{\sqrt{b^2 + a^2}} \quad (34)$$

Две точки:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}, \\ y = -\frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}, \\ y = \frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}. \end{array} \right. \quad (35)$$

ИЗ (26):

$$xdx + ydy = 0, \quad (36)$$

$$dy = -\frac{x}{y}dx. \quad (37)$$

$$dz = \frac{dx}{a} + \frac{dy}{b} = \frac{dx}{a} - \frac{x}{y} \frac{dx}{b} = \left(\frac{1}{a} - \frac{x}{y} \frac{1}{b} \right) dx \quad (38)$$

Ещё раз (37):

$$\begin{aligned} d^2z &= d\left(\frac{1}{a} - \frac{x}{y} \frac{1}{b}\right) dx = -\frac{dx}{b} d\frac{x}{y} = -\frac{dx}{b} \frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{xdy - ydx}{y^2} \frac{dx}{b} = \\ &= \frac{-\frac{x^2}{y} dx - ydx}{y^2} \frac{dx}{b} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} \frac{(dx)^2}{b} \end{aligned} \quad (39)$$

(26):

$$d^2z = -\frac{1}{y^3} \frac{(dx)^2}{b}. \quad (40)$$

Точка первая:

$$y = -\frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}} \quad \frac{1}{y^3} = -\frac{(b^2 + a^2)^{3/2}}{a^3} \quad (41)$$

$$d^2z = \frac{(b^2 + a^2)^{3/2}}{a^3} \frac{(dx)^2}{b} = \frac{(b^2 + a^2)^{3/2}}{a^2} \frac{(dx)^2}{ab} \quad (42)$$

$$\operatorname{sgn}(d^2z) = \operatorname{sgn}(ab)$$

Точка вторая:

$$y = \frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}} \quad \frac{1}{y^3} = \frac{(b^2 + a^2)^{3/2}}{a^3} \quad (43)$$

$$d^2z = -\frac{(b^2 + a^2)^{3/2}}{a^3} \frac{(dx)^2}{b} = -\frac{(b^2 + a^2)^{3/2}}{a^2} \frac{(dx)^2}{ab} \quad (44)$$

$$\operatorname{sgn}(d^2z) = -\operatorname{sgn}(ab)$$