

1 Теория

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx, \quad (1)$$

x_1, x_2, y_1, y_2 не фиксированы

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0 \quad \rightarrow \quad y = y(x, C_1, C_2), \quad (2)$$

$$\begin{cases} y(x_1, C_1, C_2) = y_1 \\ y(x_2, C_1, C_2) = y_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = C_1(x_1, y_1, x_2, y_2) \\ C_2 = C_2(x_1, y_1, x_2, y_2) \end{cases} \quad (3)$$

экстремум функции от 4-х переменных:

$$J[y] = J[y(x_1, y_1, x_2, y_2)] \quad (4)$$

$$\delta J[y] = \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = F(x_2, y, y') \delta x_2 - F(x_1, y, y') \delta x_1 + \int_{x_1}^{x_2} [F'_y(x, y, y') \delta y + F'_{y'}(x, y, y') \delta y'] dx. \quad (5)$$

Так как x сам по себе не зависит от своих пределов,

$$\delta y = \delta y(x, C_1, C_2) = y'_{C_1}(x, C_1, C_2) \delta C_1 + y'_{C_2}(x, C_1, C_2) \delta C_2, \quad (6)$$

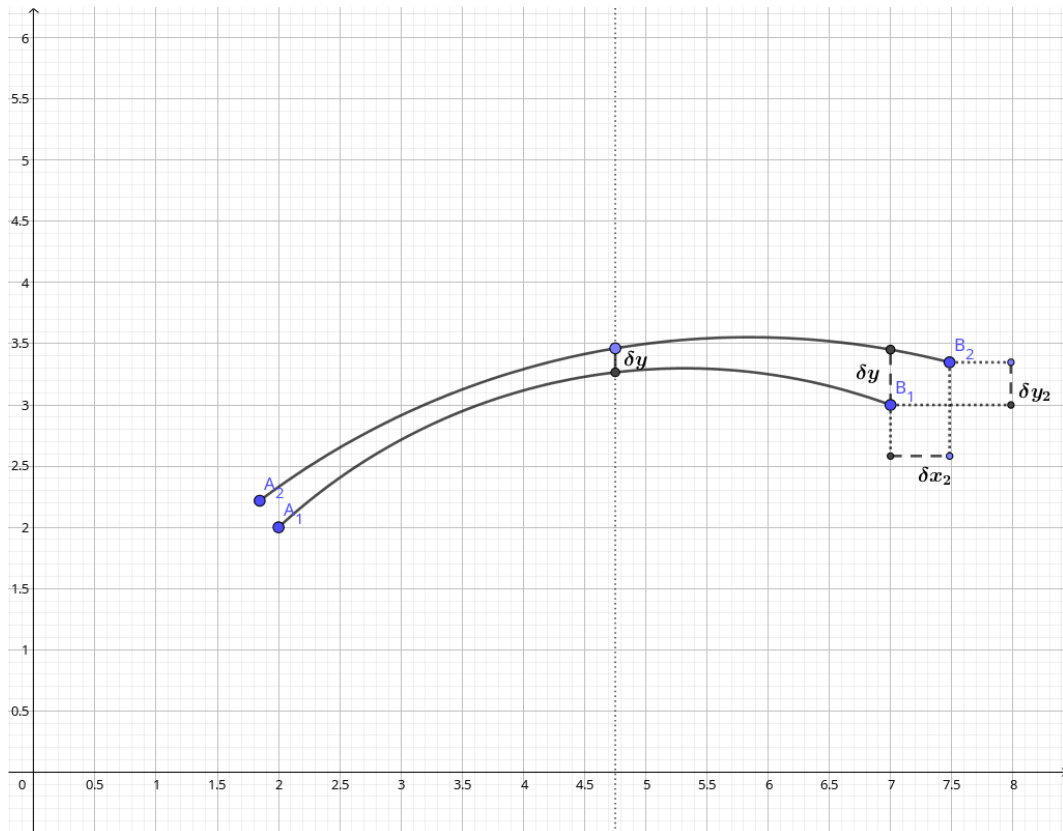
$$\delta(y') = y''_{xC_1} \delta C_1 + y''_{xC_2} \delta C_2 = \frac{d}{dx} (y'_{C_1} \delta C_1 + y'_{C_2} \delta C_2) = (\delta y)' \quad (7)$$

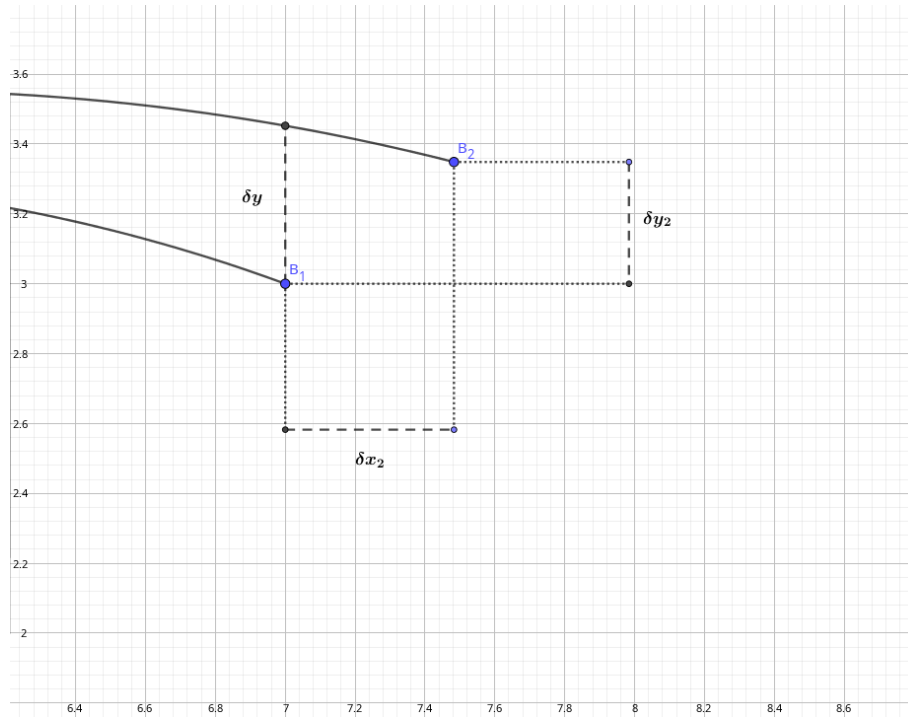
Тогда:

$$\begin{aligned} \delta J[y] &= F(x_2, y, y') \delta x_2 - F(x_1, y, y') \delta x_1 + \int_{x_1}^{x_2} F'_y(x, y, y') \delta y dx + F'_{y'}(x, y, y') \delta y|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y, y') \delta y dx = \\ &= F|_{x=x_2} \delta x_2 - F|_{x=x_1} \delta x_1 + F'_{y'} \delta y|_{x=x_2} - F'_{y'} \delta y|_{x=x_1} + \int_{x_1}^{x_2} \left(F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} \right) \delta y dx = \end{aligned} \quad (8)$$

в силу того, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$= F|_{x=x_2} \delta x_2 - F|_{x=x_1} \delta x_1 + F'_{y'} \delta y|_{x=x_2} - F'_{y'} \delta y|_{x=x_1}.$$





Беря дифференциал от (3) получим

$$\begin{cases} y'_x|_{x=x_1} \delta x_1 + \left[y'_{C_1}|_{x=x_1} \delta C_1 + y'_{C_2}|_{x=x_1} \delta C_2 \right] = \delta y_1, \\ y'_x|_{x=x_2} \delta x_2 + \left[y'_{C_1}|_{x=x_2} \delta C_1 + y'_{C_2}|_{x=x_2} \delta C_2 \right] = \delta y_2, \end{cases} \quad (9)$$

используя (6), запишем

$$\begin{cases} y'_x|_{x=x_1} \delta x_1 + \delta y|_{x=x_1} = \delta y_1 \\ y'_x|_{x=x_2} \delta x_2 + \delta y|_{x=x_2} = \delta y_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \delta y|_{x=x_1} = \delta y_1 - y'_x|_{x=x_1} \delta x_1 \\ \delta y|_{x=x_2} = \delta y_2 - y'_x|_{x=x_2} \delta x_2 \end{cases} \quad (10)$$

Окончательно:

$$\begin{aligned} \delta J[y] &= F|_{x=x_2} \delta x_2 - F|_{x=x_1} \delta x_1 + F'_{y'}|_{x=x_2} \delta y|_{x=x_2} - F'_{y'}|_{x=x_1} \delta y|_{x=x_1} = \\ &= F|_{x=x_2} \delta x_2 - F|_{x=x_1} \delta x_1 + F'_{y'}|_{x=x_2} (\delta y_2 - y'_x|_{x=x_2} \delta x_2) - F'_{y'}|_{x=x_1} (\delta y_1 - y'_x|_{x=x_1} \delta x_1) = \\ &= (F - F'_{y'} y')|_{x=x_2} \delta x_2 - (F - F'_{y'} y')|_{x=x_1} \delta x_1 + F'_{y'}|_{x=x_2} \delta y_2 - F'_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как в точке экстремума первый дифференциал должен равняться нулю,

$$(F - F'_{y'} y')|_{x=x_2} \delta x_2 - (F - F'_{y'} y')|_{x=x_1} \delta x_1 + F'_{y'}|_{x=x_2} \delta y_2 - F'_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 = 0. \quad (12)$$

1) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2$:

$$\begin{cases} (F - F'_{y'} y')|_{x=x_2} = 0 \\ (F - F'_{y'} y')|_{x=x_1} = 0 \\ F'_{y'}|_{x=x_2} = 0 \\ F'_{y'}|_{x=x_1} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

2) $y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \psi(x_2)$:

$$\delta y_1 = \varphi'(x_1) \delta x_1, \quad \delta y_2 = \psi'(x_2) \delta x_2, \quad (14)$$

$$(F - F'_{y'} y')|_{x=x_2} \delta x_2 - (F - F'_{y'} y')|_{x=x_1} \delta x_1 + F'_{y'}|_{x=x_2} \psi'(x_2) \delta x_2 - F'_{y'}|_{x=x_1} \varphi'(x_1) \delta x_1 = 0, \quad (15)$$

$$(F - F'_{y'} y' + F'_{y'} \psi')|_{x=x_2} \delta x_2 - (F - F'_{y'} y' + F'_{y'} \varphi')|_{x=x_1} \delta x_1 = 0, \quad (16)$$

а так как произвольны δx_1 и δx_2 :

$$\begin{cases} [F + F'_{y'} (\varphi' - y')]|_{x=x_1} = 0, \\ [F + F'_{y'} (\psi' - y')]|_{x=x_2} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

что и называют условием трансверсальности.

3) фиксирована начальная $A(x_1, y_1)$, свободна $B(x_2, y_2)$:

$$\delta y_1 = \delta x_1 = 0, \quad (18)$$

из (15):

$$(F - F'_{y'} y')|_{x=x_2} \delta x_2 + F'_{y'}|_{x=x_2} \delta y_2 = 0, \quad (19)$$

$$\begin{cases} (F - F'_{y'} y')|_{x=x_2} = 0, \\ F'_{y'}|_{x=x_2} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

2 Пример: 5.2

Найти кратчайшее расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $x - y = 5$.

$$L[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad y_1 = x_1^2, \quad x_2 - y_2 = 5 \quad (21)$$

Экстремаль:

$$F = \sqrt{1 + y'^2} = F(y'), \quad -\frac{d}{dx} F'(y') = 0, \quad F'(y') = \tilde{C}_1, \quad y' = C_1, \quad (22)$$

$$y = C_1 x + C_2. \quad (23)$$

Условия (17):

$$F = \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + C_1^2}, \quad F'_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}}, \quad (24)$$

$$\varphi = x^2, \quad \varphi' = 2x, \quad \psi = x - 5, \quad \psi' = 1 \quad (25)$$

$$\begin{cases} [F + F'_{y'}(\varphi' - y')]|_{x=x_1} = 0, \\ [F + F'_{y'}(\psi' - y')]|_{x=x_2} = 0, \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \left[\sqrt{1 + C_1^2} + \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} (2x - C_1) \right] \Big|_{x=x_1} = 0, \\ \left[\sqrt{1 + C_1^2} + \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} (1 - C_1) \right] \Big|_{x=x_2} = 0, \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \sqrt{1 + C_1^2} + \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} (2x_1 - C_1) = 0, \\ \sqrt{1 + C_1^2} + \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} (1 - C_1) = 0, \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} 1 + C_1^2 + (2C_1 x_1 - C_1^2) = 0, \\ 1 + C_1^2 + (C_1 - C_1^2) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + 2C_1 x_1 = 0, \\ 1 + C_1 = 0, \end{cases} \quad (29)$$

$$C_1 = -1, \quad 1 - 2x_1 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2} \quad (30)$$

$$y = -x + C_2. \quad (31)$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 + C_2 \\ y_2 = -x_2 + C_2 \\ y_1 = x_1^2 \\ x_2 - y_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -\frac{1}{2} + C_2 \\ y_2 = -x_2 + C_2 \\ y_1 = \frac{1}{4} \\ x_2 - y_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + C_2 \\ x_2 - (-x_2 + C_2) = 5 \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} C_2 = \frac{3}{4} \\ 2x_2 - \frac{3}{4} = 5 \end{cases} \quad (33)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{3}{4} \right) = \frac{23}{8}, \quad y = -x + \frac{3}{4}. \quad (34)$$

$$L[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{1/2}^{23/8} \sqrt{1 + (-1)^2} dx = \sqrt{2} \left(\frac{23}{8} - \frac{1}{2} \right) = \frac{19}{8} \sqrt{2}. \quad (35)$$