

1 Теория

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx, \quad (1)$$

экстремали с одной угловой точкой: $A(x_1, y_1) \longrightarrow M(x_0, y_0) \longrightarrow B(x_2, y_2)$.

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0 \quad (2)$$

$$\delta J[y] = \delta \int_{x_1}^{x_0} F(x, y, y') dx + \delta \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y') dx, \quad (3)$$

по формуле, выведенной в прошлый раз:

$$\delta J[y] = (F - F'_{y'} y')|_{x=x_2} \delta x_2 - (F - F'_{y'} y')|_{x=x_1} \delta x_1 + F'_{y'}|_{x=x_2} \delta y_2 - F'_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1. \quad (4)$$

$$\delta J[y] = \delta \int_{x_1}^{x_0} F(x, y, y') dx + \delta \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y') dx = \quad (5)$$

$$= (F - F'_{y'} y')|_{x=x_0-0} \delta x_0 + F'_{y'}|_{x=x_0-0} \delta y_0 - \\ - (F - F'_{y'} y')|_{x=x_0+0} \delta x_0 - F'_{y'}|_{x=x_0+0} \delta y_0 =$$

$$= \left[(F - F'_{y'} y')|_{x=x_0-0} - (F - F'_{y'} y')|_{x=x_0+0} \right] \delta x_0 + \left[F'_{y'}|_{x=x_0-0} - F'_{y'}|_{x=x_0+0} \right] \delta y_0$$

На экстремали $\delta J[y] = 0$,

$$\left[(F - F'_{y'} y')|_{x=x_0-0} - (F - F'_{y'} y')|_{x=x_0+0} \right] \delta x_0 + \left[F'_{y'}|_{x=x_0-0} - F'_{y'}|_{x=x_0+0} \right] \delta y_0 = 0 \quad (6)$$

1) Точка $M(x_0, y_0)$ движется свободно:

$$\begin{cases} (F - F'_{y'} y')|_{x=x_0-0} - (F - F'_{y'} y')|_{x=x_0+0} = 0, \\ F'_{y'}|_{x=x_0-0} - F'_{y'}|_{x=x_0+0} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

условия Вейерштрасса-Эрдмана.

2) $y_0 = \varphi(x_0)$: $\delta y_0 = \varphi' \delta x_0$,

$$\left[(F - F'_{y'} y')|_{x=x_0-0} - (F - F'_{y'} y')|_{x=x_0+0} \right] \delta x_0 + \left[F'_{y'}|_{x=x_0-0} - F'_{y'}|_{x=x_0+0} \right] \varphi' \delta x_0 = 0, \quad (8)$$

$$(F - F'_{y'} y')|_{x=x_0-0} - (F - F'_{y'} y')|_{x=x_0+0} + \left[F'_{y'}|_{x=x_0-0} - F'_{y'}|_{x=x_0+0} \right] \varphi' = 0, \quad (9)$$

$$(F - F'_{y'} y' + \varphi' F'_{y'})|_{x=x_0-0} - (F - F'_{y'} y' + \varphi' F'_{y'})|_{x=x_0+0} = 0, \quad (10)$$

$$[F + (\varphi' - y') F'_{y'}]|_{x=x_0-0} = [F + (\varphi' - y') F'_{y'}]|_{x=x_0+0}. \quad (11)$$

2 Пример: Задача 6.1

$$J[y] = \int_0^4 (y' - 1)^2 (y' + 1)^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(4) = 2. \quad (12)$$

Следствия уравнения Эйлера

$$F = (y' - 1)^2 (y' + 1)^2 = F(y') \quad (13)$$

$$y' = A, \quad y = Ax + B \quad (14)$$

$$y = \begin{cases} C_1 x + C_2, & x < x_0 \\ C_3 x + C_4, & x > x_0 \end{cases} \quad (15)$$

Учёт границ

$$y(0) = C_2 = 0, \quad y(4) = 4C_3 + C_4 = 2 \quad (16)$$

$$C_2 = 0, \quad C_4 = 2 - 4C_3 \quad (17)$$

$$y = \begin{cases} C_1 x, & x < x_0 \\ C_3 x + 2 - 4C_3, & x > x_0 \end{cases} \quad (18)$$

Учёт непрерывности

$$C_1 x_0 = C_3 x_0 + 2 - 4C_3 \quad (19)$$

Условия Вейерштрасса-Эрдмана

$$\left(F - y' F_{y'} \right) \Big|_{x=x_0-0} - \left(F - y' F_{y'} \right) \Big|_{x=x_0+0} = 0 \quad (20)$$

$$F_{y'} \Big|_{x=x_0-0} - F_{y'} \Big|_{x=x_0+0} = 0 \quad (21)$$

$$F = \left(y' - 1 \right)^2 \left(y' + 1 \right)^2 = \left(y'^2 - 1 \right)^2 = y'^4 - 2y'^2 + 1 \quad (22)$$

$$F_{y'} = 4y'^3 - 4y' \quad (23)$$

$$F - y' F_{y'} = \left(y'^4 - 2y'^2 + 1 \right) - y' \left(4y'^3 - 4y' \right) = y'^4 - 2y'^2 + 1 - 4y'^4 + 4y'^2 = 1 - 3y'^4 + 2y'^2 \quad (24)$$

$$\begin{cases} \left(1 - 3y'^4 + 2y'^2 \right) \Big|_{x=x_0-0} - \left(1 - 3y'^4 + 2y'^2 \right) \Big|_{x=x_0+0} = 0 \\ \left(4y'^3 - 4y' \right) \Big|_{x=x_0-0} - \left(4y'^3 - 4y' \right) \Big|_{x=x_0+0} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \left(1 - 3C_1^4 + 2C_1^2 \right) - \left(1 - 3C_3^4 + 2C_3^2 \right) = 0 \\ \left(4C_1^3 - 4C_1 \right) - \left(4C_3^3 - 4C_3 \right) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} 2C_1^2 - 2C_3^2 + 3C_3^4 - 3C_1^4 = 0 \\ C_1^3 - C_3^3 - C_1 + C_3 = 0 \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} 2(C_1^2 - C_3^2) - 3(C_1^4 - C_3^4) = 0 \\ (C_1^3 - C_3^3) - (C_1 - C_3) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} (C_1 - C_3)(C_1 + C_3)[2 - 3(C_1^2 + C_3^2)] = 0 \\ (C_1 - C_3)[C_1^2 + C_1 C_3 + C_3^2 - 1] = 0 \end{cases} \quad (29)$$

Или $C_1 = C_3$,

$$C_1 x_0 = C_1 x_0 + 2 - 4C_1 \implies C_1 = \frac{1}{2} \quad (30)$$

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x < x_0 \\ \frac{1}{2}x + 2 - 4 \cdot \frac{1}{2}, & x > x_0 \end{cases} = \frac{1}{2}x \quad (31)$$

Решение без угловой точки.

Или $C_3 = -C_1$,

$$C_1^2 - 1 = 0, \quad (32)$$

$$C_1 x_0 = -C_1 x_0 + 2 + 4C_1, \quad (33)$$

$$2C_1 x_0 = 2 + 4C_1 \implies x_0 = \frac{1}{C_1} + 2, \quad (34)$$

$$y = \begin{cases} C_1 x, & x < x_0 \\ -C_1 x + 2 + 4C_1, & x > x_0 \end{cases} \quad (35)$$

$C_1 = 1$:

$$x_0 = 1 + 2 = 3, \quad (36)$$

$$y = \begin{cases} x, & x < 3, \\ -x + 6, & x > 3. \end{cases} \quad (37)$$

$C_1 = -1$:

$$x_0 = -1 + 2 = 1, \quad (38)$$

$$y = \begin{cases} -x, & x < 1, \\ x - 2, & x > 1. \end{cases} \quad (39)$$

