

1 Определения

Числовой ряд

$$a_1 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

сходится, если

$$\exists S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (2)$$

Пример 1: геометрическая прогрессия: $a_n = a_1 q^{n-1}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} \quad (4)$$

сходится при $|q| < 1$, расходится при $|q| > 1$.

Пример 2: №2548

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots \quad (5)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} \quad (6)$$

$$S_n = 3 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) - (n-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2} \right)^n. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) - (n-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2^{n-1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 3 \end{aligned} \quad (8)$$

Задание: по этим образцам решить № 2546, 2547, 2549.

2 Критерий Коши

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall p, q > N \quad |x_p - x_q| < \varepsilon. \quad (9)$$

Пусть $p > q$. $x_n = S_n$:

$$|S_p - S_q| = \left| \sum_{k=1}^p a_k - \sum_{k=1}^q a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^q a_k + \sum_{k=q+1}^p a_k - \sum_{k=1}^q a_k \right| = \left| \sum_{k=q+1}^p a_k \right| < \varepsilon. \quad (10)$$

Случай $p = q + 1$.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall p, q > N \quad \left| \sum_{k=q+1}^p a_k \right| = \left| \sum_{k=p}^p a_k \right| = |a_p| < \varepsilon \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \equiv 0 \quad (12)$$

Это называется необходимым условием сходимости.

Задание: воспользоваться необходимым условием сходимости в № 2556 и 2557.

Пример: гармонический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (13)$$

$k < 2n$:

$$\frac{1}{k} > \frac{1}{2n} \quad (14)$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0, \forall N \exists q = n, p = 2n > N$:

$$\left| \sum_{k=q+1}^p a_k \right| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \frac{1}{2} = \varepsilon, \quad (16)$$

расходится по Коши.

3 Признаки сходимости рядов с положительными слагаемыми

3.1 Первый признак сравнения.

Пусть для

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (17)$$

$$0 < a_k < b_k \quad (18)$$

и второй ряд сходится.

$$0 < \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n b_k, \quad (19)$$

или

$$0 < A_n < B_n, \quad A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k. \quad (20)$$

Так как $a_k > 0, A_n > A_{n-1}$.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \implies \exists M > B_n > A_n \quad (21)$$

Последовательность A_n возрастает и ограничена сверху, значит, имеет предел, т.е. первый ряд сходится.

Доказать: если меньший расходится - то больший расходится.

3.2 Второй признак сравнения.

Пусть

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C \neq 0 \quad (22)$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N: n > N \implies$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - C \right| < \varepsilon \quad (23)$$

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - C < \varepsilon \quad (24)$$

$$C - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < C + \varepsilon \quad (25)$$

$$b_n (C - \varepsilon) < a_n < b_n (C + \varepsilon) \quad (26)$$

Ряды a и b сходятся или расходятся одновременно.

Примеры:

из №2549:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{сх.} \quad (27)$$

Рассмотрим обобщённо-гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (28)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0, \quad (29)$$

откуда (28) сл. по 1-му

Теперь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 2 \quad (30)$$

$$0 < \frac{1}{n^{\alpha}} < \frac{1}{n^2} \quad (31)$$

и (30) сл. по 2-му

Задание: при помощи признаков сравнения решите №2558-2564, при помощи критерия Коши № 2574.