

1 Область сходимости

№ 2724

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \quad (1)$$

$$f_n(x) \equiv \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{1}{x^{-n}-1} \quad (2)$$

$x \neq 1, x \neq -1$

1) $|x| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0, \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{0}{1-0} = 0, \quad (4)$$

2) $|x| > 1: \left|\frac{1}{x}\right| < 1,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = 0, \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{-n}-1} = \frac{1}{0-1} = -1 \neq 0 \quad (6)$$

расходится.

1) $-1 < x < 1.$

1.a) $x = 0 \quad f_n(0) = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{1-0^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0, \quad (7)$$

ряд сходится.

1.б) $0 < x < 1$

$$0 < x^n < 1, \quad 1 - x^n > 0, \quad (8)$$

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} > 0, \quad (9)$$

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}, \quad (10)$$

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}} \cdot \frac{1-x^n}{x^n} = x \frac{1-x^n}{1-x^{n+1}}, \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x \frac{1-x^n}{1-x^{n+1}} = x \frac{1-0}{1-0} = x < 1, \quad (12)$$

сходится по п. Даламбера.

1.в) $-1 < x < 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| x \frac{1-x^n}{1-x^{n+1}} \right| = \left| x \frac{1-0}{1-0} \right| = |x| < 1, \quad (13)$$

ряд абсолютно сходится.

Ответ: ряд сходится при $-1 < x < 1.$

№ 2716, 2717.

2 Равномерная сходимость последовательностей

Просто сходимость $f_n(x) \rightarrow f(x): \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, x), \forall n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

Равномерная сходимость на множестве $X: f_n(x) \Rightarrow f(x): \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall n > N \text{ и } \forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

№ 2746 а) $f_n(x) = x^n$ на отрезке $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$$0 \leq x^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0 \quad (14)$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N$

$$|x^n - 0| = x^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon \quad (15)$$

сх. равн. по определению.

б) $f_n(x) = x^n$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases} \quad (16)$$

Критерий Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, p > N, \forall x \in X \implies |f_n(x) - f_p(x)| < \varepsilon$.

Обратное: $\exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n, p > N, \exists x \in X: |f_n(x) - f_p(x)| > \varepsilon$.

$$|f_n(x) - f_p(x)| = x^n - x^p = x^n(1 - x^{p-n}) \quad (17)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n - x^p) = nx^{n-1} - px^{p-1} = x^{n-1}(n - px^{p-n}) = 0 \quad (18)$$

$$x^{p-n} = \frac{n}{p}, x = \left(\frac{n}{p}\right)^{\frac{1}{p-n}} \quad (19)$$

$$M = x^{*n} - x^{*p} = \left(\frac{n}{p}\right)^{\frac{n}{p-n}} - \left(\frac{n}{p}\right)^{\frac{p}{p-n}} = \left(\frac{n}{p}\right)^{\frac{n}{p-n}} \left[1 - \frac{n}{p}\right] \quad (20)$$

Пусть $p = 2n, \frac{n}{p-n} = \frac{n}{2n-n} = 1, \frac{n}{p} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

$$M = \left(\frac{n}{p}\right) \left[1 - \frac{n}{p}\right] = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4} \quad (21)$$

Тогда $\varepsilon = \frac{1}{8}, n = \forall n > N, p = 2n, x = x^*$,

$$\left|f_n\left(x^*\right) - f_p\left(x^*\right)\right| = \frac{1}{4} > \frac{1}{8} = \varepsilon, \quad (22)$$

и последовательность сходится неравномерно по критерию Коши.

№ 2747, 2748.

3 Признак Вейерштрасса для равномерной сходимости рядов

Если при $x \in X$

1)

$$|u_n(x)| < a_n,$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{сх.}$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad \text{сх. равн.}$$

№ 2774 6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}, \quad -2 < x < \infty \quad (23)$$

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x + 2^n}, \quad |f_n(x)| = \frac{1}{x + 2^n} \quad (24)$$

$$x > -2 \quad (25)$$

$$x + 2^n > -2 + 2^n \quad (26)$$

$n \geq 2$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x + 2^n} < \frac{1}{2^n - 2} \quad (27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n - 2}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 2^{1-n}} = 1 \neq 0 \quad (28)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 2} \quad \text{сх.} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n} \quad \text{сх. равн.} \quad (29)$$

№ 2774