

1 Степенной ряд и его область сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (1)$$

$a_n, x_0 = \text{const}$

п. Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}|}{|a_n (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad (2)$$

$$|x - x_0| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \equiv R \quad (4)$$

$$|x - x_0| < R \quad (5)$$

$$-R < x - x_0 < R, \quad (6)$$

$$x_0 - R < x < x_0 + R, \quad (7)$$

За пределами интервала:

$$|x - x_0| > \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}|}{|a_n (x - x_0)^n|} = q > 1 \quad (9)$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n > N$

$$\left| \frac{|a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}|}{|a_n (x - x_0)^n|} - q \right| < \varepsilon \quad (10)$$

$$q - \varepsilon < \frac{|a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}|}{|a_n (x - x_0)^n|} < q + \varepsilon \quad (11)$$

$\varepsilon = \frac{q-1}{2}, 0 < \varepsilon < q - 1, q - \varepsilon > 1$

$$|a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}| > (q - \varepsilon) |a_n (x - x_0)^n| \quad (12)$$

$$|a_{N+2} (x - x_0)^{N+2}| > (q - \varepsilon) |a_{N+1} (x - x_0)^{N+1}| \quad (13)$$

$$|a_{N+m} (x - x_0)^{N+m}| > (q - \varepsilon)^{m-1} |a_{N+1} (x - x_0)^{N+1}| \quad (14)$$

но

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (q - \varepsilon)^{m-1} = \infty, \quad (15)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |a_{N+m} (x - x_0)^{N+m}| = \infty, \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (x - x_0)^n \neq 0; \quad (17)$$

расходится.

R — радиус сходимости степенного ряда.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1, \quad (18)$$

$$|x - x_0| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad (19)$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (20)$$

(формула Коши-Адамара).

Степенной ряд сходится абсолютно если $|x - x_0| < R$ и расходится, если $|x - x_0| > R$.

Случай, когда $|x - x_0| = R$, нужно исследовать отдельно.

В Демидовиче написано, что ряд сходится при $|x - x_0| \leq R$, что, безусловно, ошибочно.

1.1 Пример №2813

Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n. \quad (21)$$

$$a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{n}, \quad x_0 = -1. \quad (22)$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{3^n + (-2)^n}{n}}{\frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{-1} + \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = \frac{3^{-1} + \frac{1}{3} \cdot 0}{1 + 0} = \frac{1}{3}. \quad (23)$$

сходится при

$$|x+1| < \frac{1}{3}, \quad (24)$$

$$-1 - \frac{1}{3} < x < -1 + \frac{1}{3}, \quad (25)$$

$$-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}. \quad (26)$$

Ряд расходится при

$$|x+1| > \frac{1}{3}, \quad (27)$$

$$x = -\frac{2}{3}:$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}. \quad (28)$$

$$\frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n} > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \right] = 1 \neq 0, \quad (29)$$

расходится одновременно с гармоническим.

$$x = -\frac{4}{3}:$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n} \quad (30)$$

Первый ряд сходится по признаку Лейбница, второй - по признаку Даламбера, сумма их, следовательно, сходится.

Область сходимости:

$$x \in \left[-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right). \quad (31)$$

1.2 Другой пример: №2822

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (32)$$

$$a_n = \frac{1}{a^n + b^n}, \quad x_0 = 0. \quad (33)$$

$$a > b$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^n + b^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a \sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}} = \frac{1}{a}, \quad R = a. \quad (34)$$

При $|x| = a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{a^n + b^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{a^n + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} = 1 \neq 0 \quad (35)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \neq 0 \quad (36)$$

ряд расходится.

Аналогично, если $b > a$,

$$R = b. \quad (37)$$

$$R = \max(a, b)$$

$$x \in (-\max(a, b); \max(a, b)). \quad (38)$$

ЗАДАНИЕ: решить №2812, 2814, 2816.

2 ряд Тейлора вокруг точки x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (39)$$

2.1 Пример 1

разложим вокруг $x_0 = 0$ функцию

$$f(x) = \frac{1}{1-x}. \quad (40)$$

Вычислим первые производные:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}. \quad (41)$$

Похоже, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}. \quad (42)$$

шаг индукции: пусть для некоторого $n = m$

$$f^{(m)}(x) = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}. \quad (43)$$

Докажем, что для $n = m + 1$:

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{(m+1)!}{(1-x)^{m+2}}. \quad (44)$$

продифференцируем:

$$f^{(m+1)}(x) = m! \frac{-(m+1)}{(1-x)^{m+2}} \cdot (-1) = \frac{(m+1)!}{(1-x)^{m+2}}, \quad (45)$$

что и т.д.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{1}{n!} \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \Big|_{x=0} = 1. \quad (46)$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (47)$$

2.2 Пример 2

$f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

$$\sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad (48)$$

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right). \quad (49)$$

Тогда

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(x)}{n!} \Big|_{x=0} \quad x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)}{n!} \Big|_{x=0} \quad x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n!} x^n = \quad (50)$$

сгруппируем попарно, $\sin \pi k = 0$:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi 2k}{2}}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\sin \frac{\pi (2k+1)}{2}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}.$$

Задание: разложить в ряд вокруг нуля e^x и $\cos x$.

3 Разложение не по формуле

3.1 Пример: №2854

Воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (51)$$

$$\frac{x^{10}}{1-x} = x^{10} \frac{1}{1-x} = x^{10} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+10} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (52)$$

при $k = 0..9$ $a_k = 0$, а при $k \geq 10$ $a_k = 1$.

3.2 Пример: №2853

Начнём с понижения степени

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \sin x \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} (\sin x - \sin x \cos 2x) = \frac{1}{2} \left\{ \sin x - \frac{1}{2} [\sin (x + 2x) + \sin (x - 2x)] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin (3x) \right\} = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin (3x).\end{aligned}\quad (53)$$

Как мы уже знаем,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.\quad (54)$$

$$\sin (3x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (3x)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}.\quad (55)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin (3x) = \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{4} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} (3^{2k} - 1) x^{2k+1}.\end{aligned}\quad (56)$$

3.3 Пример: № 2855

$$\frac{d}{dx} \left| \frac{1}{1-x} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n\quad (57)$$

$n-1=k$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k\quad (58)$$

Задание: решите сами №2851, 2852, 2873 пп. а,б;