

Система линейных уравнений

[illegible]

Матричное представление системы:

$$AX = B, \quad (2)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (3)$$

1 Правило Крамера

Работает при $m = n$, $\det(A) \neq 0$

$$AX = B \tag{4}$$

$$X = A^{-1}B \tag{5}$$

$$x_i = x_{i1} = \sum_{k=1}^n (A^{-1})_{ik} b_{k1} = \sum_{k=1}^n \frac{(A^T)_{ik}}{\det(A)} b_{k1} = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^n b_{k1} A_{ki} \equiv \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (6)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & 1 \\ \boxed{0} & 2 & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{3} & 1 \\ 1 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & \boxed{0} & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{3} \\ 1 & 2 & \boxed{0} \\ 1 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\Delta = 4, \quad \Delta_1 = 9, \quad \Delta_2 = -3, \quad \Delta_3 = -3 \quad (9)$$

$$x = \frac{9}{4}, \quad x = -\frac{3}{4}, \quad x = -\frac{3}{4} \quad (10)$$

8.6. С помощью правила Крамера решить систему уравнений:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + 16x_2 = 17; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 = 2; \end{cases}$$

$$\text{B)} \begin{cases} x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha = \cos \beta, \\ -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha = \sin \beta; \end{cases} \quad \text{Г)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

2 Метод Гаусса

(8.1 a)

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases} \quad (11)$$

Убираем x_1 :

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ \frac{4}{5}x_2 + x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 0 \\ \frac{32}{5}x_2 + 8x_3 + \frac{8}{5}x_4 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Умножаем (2) и (3) на 5:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 32x_2 + 40x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Делим (3) на 8:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Убираем x_2 :

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Отделение свободных от зависимых:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 10 - 5x_3 - 12x_4 \\ 4x_2 = -5x_3 - x_4 \end{cases} \quad (16)$$

Обратный ход:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 10 - 5x_3 - 12x_4 \\ x_2 = -\frac{5}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} 5x_1 = 10 - \frac{5}{4}x_3 - \frac{45}{4}x_4 \\ x_2 = -\frac{5}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{9}{4}x_4 \\ x_2 = -\frac{5}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \end{cases} \quad (19)$$

8.1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3, \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7; \end{cases}$$

$$\text{д)} \begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases}$$

$$\text{е)} \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases}$$

$$\text{ж)} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases}$$

$$\text{з)} \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

Нормальная фундаментальная система решений (8.4 а)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Убираем x_1 :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + 12x_3 - 10x_4 = 0 \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ 5x_2 + 30x_3 - 25x_4 = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Делим (2) на 2 и (3) на 5

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases} \quad (25)$$

Общее решение в виде столбца:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x_3 - 7x_4 \\ -6x_3 + 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x_3 \\ -6x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7x_4 \\ 5x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 \quad (26)$$

НФСР:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$$