

2.1. Найти скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если:

- 1) $|\mathbf{a}| = 3, \quad |\mathbf{b}| = 1, \quad \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 45^\circ;$
- 2) $|\mathbf{a}| = 6, \quad |\mathbf{b}| = 7, \quad \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 120^\circ;$
- 3) $|\mathbf{a}| = 4, \quad |\mathbf{b}| = 2, \quad \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 90^\circ;$
- 4) $|\mathbf{a}| = 5, \quad |\mathbf{b}| = 1, \quad \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ сонаправлены;
- 5) $|\mathbf{a}| = 2, \quad |\mathbf{b}| = 3, \quad \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ противоположно направлены.

2.2. Вычислить выражение $|\mathbf{a}|^2 - \sqrt{3}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + 5|\mathbf{b}|^2$, если:

- 1) $|\mathbf{a}| = 2, \quad |\mathbf{b}| = 1, \quad \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 30^\circ;$
- 2) $|\mathbf{a}| = 3, \quad |\mathbf{b}| = 2, \quad \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 150^\circ.$

2.3. Найти скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданных своими координатами:

- 1) $\mathbf{a}(4, -1), \mathbf{b}(-1, -7);$
- 2) $\mathbf{a}(2, 1), \mathbf{b}(1, -3);$
- 3) $\mathbf{a}(1, 2), \mathbf{b}(-4, 2).$

2.4. Найти угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданными своими координатами:

- 1) $\mathbf{a}(1, 2), \mathbf{b}(2, 4);$
- 2) $\mathbf{a}(1, 2), \mathbf{b}(4, 2);$
- 3) $\mathbf{a}(1, 2), \mathbf{b}(-2, 1);$
- 4) $\mathbf{a}(1, -1), \mathbf{b}(-4, 2);$
- 5) $\mathbf{a}(2, -1), \mathbf{b}(-4, 2).$

2.5. Найти расстояние между точками A и B , заданными своими координатами:

- 1) $A(-1, 2), B(5, 10);$
- 2) $A(3, -2), B(3, 3);$
- 3) $A(1, 2), B(1, 2).$

2.6. Найти скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданных своими координатами:

- 1) $\mathbf{a}(3, 2, -5), \mathbf{b}(10, 1, 2);$
- 2) $\mathbf{a}(1, 0, 3), \mathbf{b}(-4, 15, 1);$
- 3) $\mathbf{a}(2, 1, 5), \mathbf{b}(7, -9, -1).$

2.7. Найти угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданными своими координатами:

- 1) $\mathbf{a}(1, -1, 1), \mathbf{b}(5, 1, 1);$
- 2) $\mathbf{a}(1, -1, 1), \mathbf{b}(-2, 2, -2);$
- 3) $\mathbf{a}(1, -1, 1), \mathbf{b}(3, -3, 3);$
- 4) $\mathbf{a}(1, -1, 1), \mathbf{b}(3, 1, -2);$
- 5) $\mathbf{a}(1, -1, 1), \mathbf{b}(4, 4, -4).$

2.8. Найти расстояние между точками A и B , заданными своими координатами:

- 1) $A(4, -2, 3)$, $B(4, 5, 2)$;
- 2) $A(-3, 1, -1)$, $B(-1, 1, -1)$;
- 3) $A(3, -3, -7)$, $B(1, -4, -5)$.

2.9. Даны три вектора: $\mathbf{a}(-1, 2)$, $\mathbf{b}(5, 1)$, $\mathbf{c}(4, -2)$. Вычислить:

- 1) $\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
- 2) $|\mathbf{a}|^2 - (\mathbf{b}, \mathbf{c})$;
- 3) $|\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{b}, \mathbf{a} + 3\mathbf{c})$.

2.10. Даны три вектора: $\mathbf{a}(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}(5, 1, 1)$, $\mathbf{c}(0, 3, -2)$. Вычислить:

- 1) $\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
- 2) $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b}, \mathbf{c})$;
- 3) $(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}) - |\mathbf{a}|^2(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

2.11. Доказать, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ взаимно перпендикулярны.

2.12. Верно ли, что для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ выполняется соотношение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b}, \mathbf{d})$?

2.13. Даны три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ такие, что $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{o}$. Вычислить $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a})$.

2.14. В треугольнике ABC даны длины сторон. Найти скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$, если:

- 1) $|AB| = 5$, $|BC| = 3$, $|AC| = 4$;
- 2) $|AB| = 7$, $|BC| = 4$, $|AC| = 5$;
- 3) $|AB| = 3$, $|BC| = 2$, $|AC| = 3$.

3.1. Найти векторное произведение векторов **a** и **b**, заданных своими координатами:

1) $\mathbf{a}(3, -1, 2), \mathbf{b}(2, -3, -5);$

2) $\mathbf{a}(2, -1, 1), \mathbf{b}(-4, 2, -2);$

3) $\mathbf{a}(6, 1, 0), \mathbf{b}(3, -2, 0).$

3.2. Упростить выражения:

1) $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}];$

2) $[\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}/2, -\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 5\mathbf{c}].$

3.19. Найти смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, заданных своими координатами:

- 1) $\mathbf{a}(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}(7, 3, -5)$, $\mathbf{c}(-2, 2, -2)$;
- 2) $\mathbf{a}(3, 5, 1)$, $\mathbf{b}(4, 0, -1)$, $\mathbf{c}(2, 1, 1)$;
- 3) $\mathbf{a}(2, 1, 0)$, $\mathbf{b}(3, 4, -1)$, $\mathbf{c}(-1, -3, 1)$;
- 4) $\mathbf{a}(1, 2, 3)$, $\mathbf{b}(5, -2, 1)$, $\mathbf{c}(2, 1, 2)$.

3.20. Проверить, компланарны ли векторы, заданные своими координатами в произвольном базисе:

- 1) $\mathbf{a}(2, 3, 5)$, $\mathbf{b}(7, 1, -1)$, $\mathbf{c}(3, -5, -11)$;
- 2) $\mathbf{a}(2, 0, 1)$, $\mathbf{b}(5, 3, -3)$, $\mathbf{c}(3, 3, 10)$.

3.26. Доказать тождества:

$$1) (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2 + |[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]|^2 = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 \cdot |\mathbf{c}|^2;$$

$$2) \quad [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c});$$

$$3) \quad \mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + \mathbf{b}(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}) + \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d});$$

$$4) \quad ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2;$$