

1 Действия с матрицами

1.1 Умножение матрицы на число

$$\alpha A = C$$

$$\alpha a_{ij} = c_{ij}$$

пример

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1.2 Сложение матриц

$$A + B = C$$

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

пример

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{5} & 2 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3 Умножение матриц

$$A \cdot B = C$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = c_{ij}$$

пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 8 & 19 & 8 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

c_{11}

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{6} & 8 & 6 \\ 8 & 19 & 8 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6$$

c_{12}

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & \boxed{8} & 6 \\ 8 & 19 & 8 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 8$$

c_{13}

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & \boxed{1} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & \boxed{6} \\ 8 & 19 & 8 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6$$

c_{21}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \boxed{3} & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ \boxed{8} & 19 & 8 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8$$

c_{22}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 8 & \boxed{19} & 8 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 9 + 1 + 9 = 19$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \boxed{3} & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & \boxed{1} \\ 2 & 1 & \boxed{2} \\ 1 & 3 & \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 8 & 19 & \boxed{8} \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8$$

1.4 Транспонирование

$$A^T : a_{ij}^T = a_{ji}$$

пример

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

17.1. Перемножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix};$

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix};$

е) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix};$

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};$

з) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

17.2. Выполнить действия:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

17.3. Вычислить:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2;$ б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2;$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2;$ г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2.$

17.4. Вычислить:

а) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n;$ б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n;$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}^n.$

2 Определители

Перестановки

$$0) \quad \left(\underbrace{2, 3, 5, 4, 1} \right)$$

$$1) \quad \left(1, \underbrace{3, 5, 4, 2} \right)$$

$$2) \quad \left(1, 2, \underbrace{5, 4, 3} \right)$$

$$3) \quad \left(1, 2, 3, \underbrace{4, 5} \right)$$

Три перестановки - нечётная

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3 < 5, 6, 4, 7 \quad 4$$

$$1 < 5, 6, 4, 7, 2 \quad 5$$

$$2 < 5, 6, 4, 7 \quad 4$$

$$7 < \dots \quad 0$$

$$4 < 5, 6 \quad 2$$

$$6 < \dots \quad 0$$

$$4 + 5 + 4 + 0 + 2 + 0$$

Нечётное число

Определители по определению

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a} & b \\ c & \boxed{d} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & \boxed{b} \\ \boxed{c} & d \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 5 \cdot 5 = 9 - 15 = -6$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 5 & \boxed{1} & 4 \\ 3 & 2 & \boxed{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 5 & 1 & \boxed{4} \\ 3 & \boxed{2} & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ \boxed{5} & 1 & 4 \\ 3 & 2 & \boxed{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 5 & 1 & \boxed{4} \\ \boxed{3} & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ \boxed{5} & 1 & 4 \\ 3 & \boxed{2} & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 5 & \boxed{1} & 4 \\ \boxed{3} & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(1, 2, 3) \quad (1, 3, 2) \quad (2, 1, 3) \quad (2, 3, 1) \quad (3, 1, 2) \quad (3, 2, 1)$$

$$1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1$$

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 3 =$$

$$= 5 - 8 - 50 + 24 + 30 - 9 = -3 - 5 = -8$$

9.1. Вычислить определители:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}; & \text{б)} \quad & \begin{vmatrix} ab & ac \\ bd & cd \end{vmatrix}; & \text{в)} \quad & \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}; \\ \text{г)} \quad & \begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta \end{vmatrix}; & \text{д)} \quad & \begin{vmatrix} \log_b a & 1 \\ 1 & \log_a b \end{vmatrix}; \\ \text{е)} \quad & \begin{vmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{vmatrix}; & \text{ж)} \quad & \begin{vmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

9.2. Вычислить определители:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}; & \text{б)} \quad & \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; & \text{в)} \quad & \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \\ \text{г)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; & \text{д)} \quad & \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}; & \text{е)} \quad & \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}; \\ \text{ж)} \quad & \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix}; & \text{з)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}; \end{aligned}$$