

1 Определители

1.1 Раскрытие по строке

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ki} A_{ki} \\
 (12.1) \quad & \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \\
 &= a \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + c \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} + d \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \\
 &= a \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \\
 &= 8a - (-15)b + 12c - 19d = 8a + 15b + 12c - 19d
 \end{aligned}$$

1.2 Преобразования (13.1 г)

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow = 3 \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Вычтем первый столбец из остальных:

$$= 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 & -5 & -4 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 0 & -5 & -4 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 0 & -5 & -4 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

Вычтем нижнюю строку из первой и добавим ко второй:

$$= -3 \cdot 4 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 \cdot 4 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 \cdot 4 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -48(16 - 9) = -48 \cdot 7 = -336$$

13.1. Вычислить определители:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{е)} \begin{vmatrix} -5 & -7 & -2 & 2 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & -1 & 15 & -5 \\ 5 & -4 & 10 & 1 & 14 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{ж)} \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}; \quad \text{з)} \begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix};$$

$$\text{и)} \begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 15 \\ 15 & 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 & 30 \end{vmatrix}; \quad \text{к)} \begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/2 \end{vmatrix};$$

$$\text{л)} \begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix};$$

$$\text{м)} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{н)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{о)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -3 & -7 \\ -3 & 4 & 2 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{п)} \begin{vmatrix} 14 & 13 & 3 & -13 \\ -7 & -4 & 2 & 10 \\ 21 & 23 & 0 & -23 \\ 7 & 12 & -2 & -6 \end{vmatrix};$$

$$\text{р)} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 8 & -4 \\ 5 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{с)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & -5 \\ 1 & 6 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

2 Обратные матрицы

18.8 а)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ж)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \end{array} \right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 3 & -1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

18.8. С помощью присоединенной матрицы найти обратную к матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; л) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

18.3. Решить матричные уравнения

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $X \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{е)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж)} X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{з)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{и)} X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{к)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{л)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{м)} X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{н)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{о)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$