

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = f(x) \quad (1)$$

n частных решений однородного уравнения:

$$\sum_{k=0}^n a_k y_{0m}^{(k)} = 0, \quad (2)$$

$$y_0 = \sum_{m=1}^n C_m y_{0m}, \quad C_m = \text{const.} \quad (3)$$

$$y = \sum_{m=1}^n \varphi_m(x) y_{0m}. \quad (4)$$

производная:

$$y' = \sum_{m=1}^n \varphi'_m(x) y_{0m} + \sum_{m=1}^n \varphi_m(x) y'_{0m}. \quad (5)$$

Первое условие на $\varphi_m(x)$:

$$\sum_{m=1}^n \varphi'_m(x) y_{0m} = 0, \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_{m=1}^n \varphi_m(x) y'_{0m}. \quad (6)$$

Аналогично:

$$\sum_{m=1}^n \varphi'_m y'_{0m} = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = \sum_{m=1}^n \varphi_m y''_{0m}, \quad (7)$$

$$\sum_{m=1}^n \varphi'_m y''_{0m} = 0 \quad \Rightarrow \quad y''' = \sum_{m=1}^n \varphi_m y'''_{0m}, \quad (8)$$

$$\dots \dots \dots \sum_{m=1}^n \varphi'_m y_{0m}^{(n-2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad y^{(n-1)} = \sum_{m=1}^n \varphi_m y_{0m}^{(n-1)}. \quad (9)$$

$$y^{(n)} = \sum_{m=1}^n \varphi'_m y_{0m}^{(n-1)} + \sum_{m=1}^n \varphi_m y_{0m}^{(n)}. \quad (10)$$

Теперь подставим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} + a_n y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{m=1}^n \varphi_m y_{0m}^{(k)} + a_n \left(\sum_{m=1}^n \varphi'_m y_{0m}^{(n-1)} + \sum_{m=1}^n \varphi_m y_{0m}^{(n)} \right) = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{m=1}^n \varphi_m y_{0m}^{(k)} + a_n \sum_{m=1}^n \varphi_m y_{0m}^{(n)} \right) + a_n \sum_{m=1}^n \varphi'_m y_{0m}^{(n-1)} = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{m=1}^n \varphi_m y_{0m}^{(k)} + a_n \sum_{m=1}^n \varphi'_m y_{0m}^{(n-1)} = \\ &= \sum_{m=1}^n \varphi_m \sum_{k=0}^n a_k y_{0m}^{(k)} + a_n \sum_{m=1}^n \varphi'_m y_{0m}^{(n-1)} = a_n \sum_{m=1}^n \varphi'_m y_{0m}^{(n-1)} = f(x) \end{aligned} \quad (11)$$

Все условия на $\varphi_m(x)$:

$$\begin{cases} \varphi'_1 y_{01} + \dots + \varphi'_n y_{0n} = 0, \\ \varphi'_1 y'_{01} + \dots + \varphi'_n y'_{0n} = 0, \\ \dots \\ \varphi'_1 y_{01}^{(n-2)} + \dots + \varphi'_n y_{0n}^{(n-2)} = 0, \\ \varphi'_1 y_{01}^{(n-1)} + \dots + \varphi'_n y_{0n}^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_n}; \end{cases} \quad (12)$$

Филиппов, № 576

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}. \quad (13)$$

$$y''_0 + 3y'_0 + 2y_0 = 0, \quad (14)$$

характеристическое:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1. \quad (15)$$

Частные решения:

$$y_{01} = e^{-2x}, \quad y_{02} = e^{-x}; \quad (16)$$

решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = e^{-2x} \varphi_1(x) + e^{-x} \varphi_2(x). \quad (17)$$

$$\begin{cases} e^{-2x}\varphi_1' + e^{-x}\varphi_2' = 0, \\ -2e^{-2x}\varphi_1' - e^{-x}\varphi_2' = \frac{1}{e^x+1}. \end{cases} \quad (18)$$

$$-e^{-2x}\varphi_1' = \frac{1}{e^x+1}, \quad \varphi_1' = -\frac{e^{2x}}{e^x+1}, \quad (19)$$

$$e^{-x}\varphi_2' = -e^{-2x}\varphi_1', \quad \varphi_2' = -e^{-x}\varphi_1' = \frac{e^x}{e^x+1}. \quad (20)$$

$$\varphi_1 = -\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx = -\int \frac{e^x(e^x+1-1)}{e^x+1} dx = -\int \left(e^x - \frac{e^x}{e^x+1} \right) dx = -e^x + \ln(e^x+1) + C_1, \quad (21)$$

$$\varphi_2 = \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln(e^x+1) + C_2; \quad (22)$$

$$y = e^{-2x} [-e^x + \ln(e^x+1) + C_1] + e^{-x} [\ln(e^x+1) + C_2]. \quad (23)$$

(575, 577, 578)

Уравнения Эйлера:

$$\sum_{k=0}^n a_k (bx+c)^k y^{(k)} = f(x) \quad (24)$$

$$bx+c=e^t.$$

Филиппов, № 599

$$(x-2)^2 y''-3(x-2)y'+4y=x. \quad (25)$$

Замена:

$$x-2=e^t, \quad 1=e^t t'_x, \quad t'_x=e^{-t}; \quad (26)$$

$$y'=y t'_x=e^{-t} \dot{y}, \quad y''=\frac{dy'}{dt} t'_x=e^{-t} \frac{d}{dt} (e^{-t} \dot{y})=e^{-t} (-e^{-t} \dot{y}+e^{-t} \ddot{y})=e^{-2t} (\ddot{y}-\dot{y}). \quad (27)$$

Подставляем в уравнение (25):

$$(x-2)^2 e^{-2t} (\ddot{y}-\dot{y})-3e^{-t} (x-2) \dot{y}+4y=e^t+2, \quad (28)$$

$$(\ddot{y}-\dot{y})-3\dot{y}+4y=e^t+2, \quad (29)$$

$$\ddot{y}-4\dot{y}+4y=e^t+2, \quad (30)$$

$$\ddot{y}_0-4\dot{y}_0+4y_0=0. \quad (31)$$

$$\lambda^2-4\lambda+4=0, \quad \lambda=2, \quad k=2, \quad (32)$$

$$y_{01}=e^{2t}, y_{02}=te^{2t},$$

$$y_0=C_1 e^{2t}+C_2 t e^{2t}. \quad (33)$$

$$\ddot{y}_1-4\dot{y}_1+4y_1=e^t \quad (34)$$

$$y_1=Ae^t \quad (35)$$

$$Ae^t-4Ae^t+4Ae^t=e^t \quad (36)$$

$$A=1, \quad y_1=e^t \quad (37)$$

$$\ddot{y}_2-4\dot{y}_2+4y_2=2 \quad (38)$$

$$y_2=B \quad (39)$$

$$4B=2, \quad B=\frac{1}{2}, \quad y_2=\frac{1}{2}. \quad (40)$$

$$y=y_0+y_1+y_2=C_1 e^{2t}+C_2 t e^{2t}+e^t+\frac{1}{2}=(C_1+C_2 t) e^{2t}+e^t+\frac{1}{2}. \quad (41)$$

$$e^t=x-2$$

$$y=[C_1+C_2 \ln (x-2)](x-2)^2+x-\frac{3}{2}. \quad (42)$$

(591, 596, 600)