

Казанский государственный университет

Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Методическое пособие

Казанский государственный университет

2009

УДК 517.91

*Печатается по решению
учебно-методической комиссии
филиала КГУ в г. Зеленодольске*

Рецензенты:

профессор кафедры высшей математики КГЭУ, д.ф.-м.н. С.А. Григорян
доцент кафедры теории относительности и гравитации КГУ, к.ф.-м.н.
Р.А. Даишев

Мухарлямов Р. К., Панкратьева Т. Н.

Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков. -
Казань: КГУ, 2009. - 58 с.

Библиогр.: 6 назв.

Данное методическое пособие посвящено изучению методов решения дифференциальных уравнений высших порядков, изучаемых в рамках курса "Дифференциальные уравнения" на физико-математическом факультете филиала КГУ в г. Зеленодольске. Это пособие предлагается студентам для более эффективного освоения изучаемого материала, а также преподавателям для проведения практических занятий. В каждом разделе приводятся необходимые теоретические сведения и подробно разбираются типовые примеры. В конце раздела предлагаются задачи для самостоятельной работы.

©Казанский государственный
университет, 2009

Оглавление

1	Уравнения, допускающие понижение порядка	5
1.1	Уравнения, содержащие только независимую переменную и производную порядка n	5
1.2	Уравнения, не содержащие искомой функции	10
1.3	Уравнения, не содержащие независимой переменной	11
1.4	Уравнения вида $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$	13
1.5	Уравнения вида $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$	16
1.6	Уравнения, однородные относительно искомой функции и ее производных	17
1.7	Обобщенно-однородные уравнения	19
1.8	Метод интегрируемых комбинаций	21
2	Линейные уравнения с постоянными коэффициентами	25
2.1	Однородные уравнения. Метод Эйлера	25
2.2	Неоднородные уравнения	31
2.3	Уравнение Эйлера	40
3	Линейные уравнения с переменными коэффициентами	42
3.1	Формула Остроградского - Лиувилля	42
3.2	Методы нахождения частных решений	46
4	Интегрирование линейных уравнений методом степенных рядов	48
4.1	Нахождение решений однородных линейных уравнений второго порядка в виде степенных рядов	48

4.2	Нахождение решений однородных линейных уравнений второго порядка в виде обобщенных степенных рядов	53
-----	--	----

Глава 1. Уравнения, допускающие понижение порядка

1.1 Уравнения, содержащие только независимую переменную и производную порядка n

Уравнения, разрешенные относительно производной

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x). \quad (1.1)$$

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) . Тогда существует единственное решение задачи Коши, причем начальные данные $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ можно задавать любые, а x_0 должно принадлежать интервалу (a, b) . Это решение будет частным и будет определено во всем интервале (a, b) . Особых решений уравнение (1.1) не имеет.

Интегрируя последовательно уравнение (1.1), получаем общее решение

$$y = \underbrace{\int \int \dots \int}_{n \text{ раз}} f(x) dx dx \dots dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n x + C_n \quad (1.2)$$

в области

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty, \dots, \quad |y^{(n-1)}| < +\infty. \quad (1.3)$$

C_1, C_2, \dots, C_n - произвольные постоянные.

Общее решение можно записать также в форме Коши:

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \cdots \int_{x_0}^x}_{n \text{ раз}} f(x) dx dx \cdots dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!} (x-x_0)^{(n-1)} + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!} (x-x_0)^{(n-2)} + \dots + y_0'(x-x_0) + y_0, \quad (1.4)$$

где x_0 - фиксированное число из интервала (a, b) , а $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ играют роль произвольных постоянных, которые здесь могут принимать любые значения. Учитывая, что

$$\underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \cdots \int_{x_0}^x}_{n \text{ раз}} f(x) dx dx \cdots dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt,$$

общее решение можно записать в следующих формах:

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n x + C_n, \quad (1.5)$$

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!} (x-x_0)^{(n-1)} + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!} (x-x_0)^{(n-2)} + \dots + y_0'(x-x_0) + y_0. \quad (1.6)$$

Если известно какое-нибудь частное решение y_1 уравнения (1.1), то общее решение имеет вид

$$y = y_1 + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n x + C_n.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' = xe^x \quad (1.7)$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Решение. Интегрируем последовательно уравнение (1.7), получаем общее решение:

$$\begin{cases} y' = (x - 1)e^x + C_1, \\ y = (x - 2)e^x + C_1x + C_2. \end{cases} \quad (1.8)$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям. Подставим начальные данные $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 0$ в систему (1.8):

$$\begin{cases} 0 = -1 + C_1, \\ 1 = -2 + C_2, \end{cases}$$

получим $C_1 = 1$, $C_2 = 3$, отсюда частное решение

$$y = (x - 2)e^x + x + 3. \quad (1.9)$$

Это же частное решение можно получить, используя формулу общего решения в форме Коши (1.6). Положим в ней $n = 2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 0$:

$$y = \int_0^x te^t(x - t)dt + 1.$$

Выполнив интегрирование, вновь получим решение (1.9).

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y''^2 + 5y'' + 6 = 0. \quad (1.10)$$

Решение. Это квадратное уравнение относительно производной y'' . Разрешаем его: $y'' = -2$, $y'' = -3$. Интегрируем эти уравнения:

$$y' = -2x + C_1, \quad y = -x^2 + C_1x + C_2;$$

$$y' = -3x + C_1, \quad y = -\frac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2.$$

Совокупность этих общих решений образует общий интеграл уравнения (1.10). Его можно записать в виде одного соотношения

$$(y + x^2 - C_1x - C_2)(y + \frac{3}{2}x^2 - C_1x - C_2) = 0.$$

Уравнения, не разрешенные относительно производной

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \quad (1.11)$$

Если его можно разрешить в элементарных функциях относительно $y^{(n)}$, мы получим одно или несколько уравнений рассмотренного выше вида (смотри пример (2)).

Иногда уравнения можно разрешить относительно независимой переменной x :

$$x = f(y^{(n)}).$$

В этом случае удастся найти общее решение в параметрической форме. Вводим параметр $y^{(n)} = t$, тогда $x = f(t)$. Так как x уже выражено через параметр t , то задача сводится к тому, чтобы выразить y через t . Находим дифференциал независимой переменной $dx = f'(t)dt$. Тогда $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = t f'(t)dt$, откуда

$$y^{(n-1)} = \int t f'(t)dt + C_1 \equiv \varphi_1(t, C_1).$$

Аналогично найдем выражение для $y^{(n-2)}$ и т.д. Наконец для y получим выражение вида $y = \varphi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$, следовательно,

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = \varphi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{cases} \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) будем называть *общим решением* уравнения (1.11) в *параметрической форме*.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$x - e^{y''} + y''^2 = 0. \quad (1.13)$$

Решение. Уравнение неразрешимо относительно y'' . Зато оно разрешимо относительно x : $x = e^{y''} - y''^2$. Приняв y'' за t , получим параметрическое представление уравнения (1.13) в виде $x = e^t - t^2$, $y'' = t$. Далее, $dx = (e^t - 2t)dt$, $dy' = y''dx = t(e^t - 2t)dt$, откуда

$$y' = \int t(e^t - 2t)dt + C_1 = e^t(t - 1) - \frac{2}{3}t^3 + C_1.$$

Поэтому

$$dy = y'dx = \left(e^t(t-1) - \frac{2}{3}t^3 + C_1 \right) (e^t - 2t)dt$$

или

$$dy = \left(e^{2t}(t-1) - \left(\frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - 2t - C_1 \right) e^t + \frac{4}{3}t^4 - 2C_1t \right) dt.$$

Интегрируем и получаем решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right) e^{2t} - \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t + 2 - C_1 \right) e^t + \frac{4}{15}t^5 - C_1t^2 + C_2, \\ x = e^t - t^2. \end{cases}$$

Пусть уравнение (1.11) допускает такое параметрическое представление:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y^{(n)} = \psi(t), \end{cases}$$

тогда

$$\begin{aligned} dx &= \varphi'(t)dt, & dy^{(n-1)} &= y^{(n)}dx = \psi(t)\varphi'(t)dt, \\ y^{(n-1)} &= \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 \equiv \psi_1(t, C_1). \end{aligned}$$

Рассуждая так же как и в выше рассмотренном типе уравнения, получим общее решение в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{cases}$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y''^2 - 8y'' + x^2 - 6x + 24 = 0. \quad (1.14)$$

Решение. Представим уравнение в виде

$$(x-3)^2 + (y''-4)^2 = 1.$$

Оно допускает следующую параметризацию:

$$\begin{cases} x = \cos t + 3, \\ y'' = \sin t + 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\sin t dt, \\ dy' = y'' dx. \end{cases}$$

Исключаем dx из последней системы уравнений:

$$dy' = -(\sin t + 4) \sin t dt = -(\sin^2 t + 4 \sin t) dt,$$

откуда

$$y' = - \int (\sin^2 t + 4 \sin t) dt + C_1 = -\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + 4 \cos t + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy = \left(-\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + 4 \cos t + C_1 \right) dx = - \left(-\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + 4 \cos t + C_1 \right) \sin t dt.$$

Интегрируем, находим решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \cos t + 3 \\ y = -\frac{t \cos t}{2} + \frac{\sin t}{2} - \frac{\sin^3 t}{6} + 2 \cos^2 t + C_1 \cos t + C_2. \end{cases}$$

1.2 Уравнения, не содержащие искомой функции

Этот тип уравнения имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 \leq k < n).$$

С помощью подстановки $y^{(k)} = z$, где z - новая неизвестная функция, уравнение рассматриваемого типа приводится к уравнению $(n - k)$ -го порядка:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0. \quad (1.15)$$

Если (1.15) интегрируется в квадратуре так, что мы найдем

$$z = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \quad \text{или} \quad \Phi(x, z, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0,$$

то, возвращаясь к переменной y , соответственно,

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \quad \text{или} \quad \Phi(x, y^{(k)}, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0.$$

Это уравнение рассмотренного выше вида.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \frac{2y'^2}{x^2} = 0. \quad (1.16)$$

Подставляя выражение для $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ в уравнение (1.17), получаем уравнение $(n - 1)$ -го порядка с искомой функцией z от независимой переменной y .

Принимая y за независимую переменную, мы могли потерять решение вида $y = \text{const}$. Непосредственной подстановкой в уравнение (1.17) можно выяснить, имеет ли оно решение такого вида.

Если уравнение имеет вид

$$F(y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 \leq k < n), \quad (1.18)$$

то делаем замену $y^{(k)} = z(x)$. Тогда уравнение (1.18) примет вид уравнения (1.17):

$$F(z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0 \quad (1 \leq k < n).$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$2yy'' = y'^2 + y^2. \quad (1.19)$$

Решение. Положим $y'_x = z(y)$ и, приняв y за новую переменную, получим $y''_{xx} = z'_y y'_x = z'_y z$. Тогда уравнение (1.19) можно записать в виде

$$2yz \frac{dz}{dy} = z^2 + y^2.$$

Полагая $z^2 = u$ и учитывая, что $2z \frac{dz}{dy} = \frac{du}{dy}$, получим

$$yu'_y = u + y^2.$$

Получили линейное уравнение. Решаем его:

$$u = C_1 y + y^2.$$

Следовательно, $z^2 = C_1 y + y^2$, $y'^2 = C_1 y + y^2$, откуда

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 y + y^2}} = \pm dx \Rightarrow \ln |y + C_1/2 + \sqrt{C_1 y + y^2}| = \pm x + C_2.$$

Потерянное решение:

$$y = 0.$$

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$yy'' + 1 = y'^2. \quad (1.20)$$

Решение. Положим $y'_x = z(y)$, получим $y''_{xx} = z'_y y'_x = z'_y z$. Тогда из (1.20) следует

$$yz z'_y = z^2 - 1 \Rightarrow z^2 - 1 = C y^2 \Rightarrow y' = \pm \sqrt{C y^2 - 1}.$$

Здесь возникают три возможности:

1. $C = 0$. В этом случае $dy = \pm x \Rightarrow y = A \pm x$;

2. $C < 0$, $C = -C_1^2$. Отсюда

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - (C_1 y)^2}} = \pm dx \Rightarrow C_1 y = \sin(C_0 + C_1 x);$$

3. $C > 0$, $C = C_1^2$. Отсюда

$$\frac{dy}{\sqrt{1 + (C_1 y)^2}} = \pm dx \Rightarrow C_1 y = \pm \operatorname{sh}(C_0 + C_1 x).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи вида уравнения (1.18).

1.4 Уравнения вида $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

Уравнения, разрешенные относительно $y^{(n)}$

Рассмотрим уравнение вида $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}). \quad (1.21)$$

Делаем замену $y^{(n-1)} = z(x)$, получаем уравнение

$$z'_x = f(z) \quad \text{или} \quad \frac{dz}{f(z)} = dx. \quad (1.22)$$

Интегрируем

$$\int \frac{dz}{f(z)} = x + C_1. \quad (1.23)$$

Если возможно, полученное решение (1.23) разрешаем относительно z : $z = \omega(x, C)$. Делаем обратную замену: $y^{(n-1)} = \omega(x, C)$. Этот тип уравнения был рассмотрен выше.

Если разрешить уравнение (1.23) относительно z нельзя, то поступаем следующим образом. Принимаем z за новую независимую переменную:

$$\left\{ \begin{array}{l} dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx = \frac{z dz}{f(z)}, \\ y^{(n-2)} = \int \frac{z dz}{f(z)} = \varphi_2(z, C_2), \\ dy^{(n-3)} = y^{(n-2)} dx = \frac{\varphi_2(z, C_2) dz}{f(z)}, \\ y^{(n-3)} = \int \frac{\varphi_2(z, C_2) dz}{f(z)} = \varphi_3(z, C_2, C_3), \\ \dots\dots\dots \\ y = \varphi_n(z, C_2, \dots, C_n). \end{array} \right. \quad (1.24)$$

В результате получаем решение в параметрическом виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{dz}{f(z)} = x + C_1, \\ y = \varphi_n(z, C_2, \dots, C_n). \end{array} \right.$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения

$$y'''(3y''^2 + 2y'') = 1. \quad (1.25)$$

Решение. Разрешаем уравнение (1.25) относительно y''' и делаем замену $y'' = z$:

$$y''' = \frac{1}{3y''^2 + 2y''}, \quad z' = \frac{1}{3z^2 + 2z}.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\begin{aligned} (3z^2 + 2z) dz &= dx, \\ x &= z^3 + z^2 + C_1. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Проводим цепь расчетов по формуле (1.24):

$$\begin{aligned} dy' &= y'' dx = z(3z^2 + 2z) dz, \\ y' &= \int z(3z^2 + 2z) dz = \frac{3z^4}{4} + \frac{2z^3}{3} + C_2, \\ dy &= y' dx = \left(\frac{3z^4}{4} + \frac{2z^3}{3} + C_2 \right) (3z^2 + 2z) dz, \\ y &= \int \left(\frac{3z^4}{4} + \frac{2z^3}{3} + C_2 \right) (3z^2 + 2z) dz = \frac{9z^7}{28} + \frac{7z^6}{12} + \frac{4z^5}{15} + C_2(z^3 + z^2) + C_3. \end{aligned}$$

Получаем решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = z^3 + z^2 + C_1, \\ y = \frac{9z^7}{28} + \frac{7z^6}{12} + \frac{4z^5}{15} + C_2(z^3 + z^2) + C_3. \end{cases}$$

Уравнения, разрешенные относительно $y^{(n-1)}$

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n-1)} = f(y^{(n)}). \quad (1.27)$$

Делаем замену $y^{(n-1)} = z(x)$, получаем уравнение

$$z = f(z'_x). \quad (1.28)$$

Введем параметр $z' = \frac{dz}{dx} = p$, откуда $dz = p dx$, $z = f(p)$. Дифференцируем последнее выражение по p : $dz = f'(p) dp = p dx$. Отсюда

$$dx = \frac{f'(p) dp}{p} \Rightarrow x = \int \frac{f'(p) dp}{p} + C_1. \quad (1.29)$$

Уравнение (1.28) можно переписать как

$$y^{(n-1)} = f(p). \quad (1.30)$$

Учитывая уравнения (1.29) и (1.30), применим цепь расчетов по формуле (1.24) (вместо параметра z фигурирует параметр p). В результате получаем решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \int \frac{f'(p) dp}{p} + C_1, \\ y = \varphi_n(p, C_2, \dots, C_n). \end{cases}$$

Уравнения, допускающие параметрическое представление

Пусть данный тип уравнения допускает параметрическое представление:

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t).$$

Принимая во внимание $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$, получим

$$dx = \frac{y^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)}, \quad x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + C_1.$$

По формуле (1.24) находим решение в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C_1, \\ y = \phi(t, C_2, \dots, C_n). \end{cases}$$

1.5 Уравнения вида $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

Уравнения, разрешенные относительно $y^{(n)}$

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}).$$

Делаем замену $y^{(n-2)} = z(x)$, получаем уравнение

$$z''_{xx} = f(z). \quad (1.31)$$

Расписываем $z'' = \frac{dz'}{dx}$, умножаем обе части уравнения (1.31) на $2z'dx$ и, имея в виду, что $z'dx = dz$, получим

$$2z'dz' = 2f(z)dz.$$

Интегрируем:

$$z'^2 = \int 2f(z)dz + C_1.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\int 2f(z)dz + C_1}, \quad x = \int \frac{dz}{\sqrt{\int 2f(z)dz + C_1}} + C_2. \quad (1.32)$$

Далее можно получить решение в параметрической форме либо уравнение (1.32) свести к уравнению вида $y^{(n-2)} = \omega(x, C_1, C_2)$.

Уравнения, разрешенные относительно $y^{(n-2)}$

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n-2)} = f(y^{(n)}).$$

Делаем замену $y^{(n-2)} = z(x)$, получаем уравнение

$$z = f(z''_{xx}). \quad (1.33)$$

Положим $z'' = u$: $z = f(u)$. Отсюда

$$dz = f'_u du. \quad (1.34)$$

С другой стороны,

$$dz'^2 = 2z'dz' = 2z'z''dx = 2z''dz = 2udz = 2uf'_u du. \quad (1.35)$$

Интегрируем

$$z' = \sqrt{\int 2uf'_u du + C_1}, \quad dx = \frac{dz}{\sqrt{\int 2uf'_u du + C_1}}.$$

Подставляем формулу (1.34) и интегрируем

$$x = \int \frac{f'_u du}{\sqrt{\int 2uf'_u du + C_1}} + C_2. \quad (1.36)$$

Далее можно получить решение в параметрической форме либо уравнение (1.36) свести к уравнению вида $y^{(n-2)} = \omega(x, C_1, C_2)$.

1.6 Уравнения, однородные относительно искомой функции и ее производных

Определение 1.1. Уравнение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.37)$$

называется однородным относительно искомой функции и ее производных, если при замене $y \rightarrow ky, y' \rightarrow ky', \dots, y^{(n)} \rightarrow ky^{(n)}$ выполняется условие

$$F(x, ky, ky', \dots, ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Уравнение (1.37) понижается на единицу, если положить

$$y' = yz, \quad (1.38)$$

где z - новая неизвестная функция: $z = z(x)$.

Решение. Проверим, является ли это уравнение однородным. Делаем замену $y \rightarrow ky, y' \rightarrow ky', y'' \rightarrow ky''$ в уравнении (1.39):

$$k^2 y y'' - k^2 x y'^2 - k^2 y y' = 0.$$

Делим уравнение на k^2 , получаем исходное уравнение

$$x y y'' - x y'^2 - y y' = 0.$$

Уравнение однородно.

Полагая $y' = yz$, получаем $y'' = y(z^2 + z')$. Подставляя выражения для y' и y'' в уравнение (1.39) и сокращая на y^2 , получаем

$$x(z^2 + z') - xz^2 - z = 0 \quad \text{или} \quad xz' - z = 0.$$

Интегрируем последнее уравнение $z = C_1 x$. Заменим z на y'/y : $y'/y = C_1$. Интегрируем еще раз, получаем

$$y = C_2 e^{(C_1/2)x^2}.$$

1.7 Обобщенно-однородные уравнения

Определение 1.2. Уравнение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.40}$$

называется обобщенно-однородным, если при замене

$$x \rightarrow kx, y \rightarrow k^m y, y' \rightarrow k^{m-1} y', \dots, y^{(n)} \rightarrow k^{m-n} y^{(n)} \tag{1.41}$$

выполняется условие

$$F(kx, k^m y, k^{m-1} y', \dots, k^{m-n} y^{(n)}) = k^s F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Чтобы найти число m , надо приравнять друг к другу показатели степеней, в которых число k будет входить в каждый член уравнения после замены (1.41).

После того как число m найдено, надо сделать замену

$$x = e^t, y = ze^{mt}, \tag{1.42}$$

Интегрируем $u = \operatorname{tg}(C_1 - z)$. Заменяем u на $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt} = \operatorname{tg}(C_1 - z) \Rightarrow \frac{dz}{-\operatorname{tg}(z - C_1)} = dt \Rightarrow \ln |\sin(z - C_1)| = -t + \ln |C_2|.$$

Возвращаемся к переменным x и y :

$$\ln |\sin(y/x - C_1)| = -\ln x + \ln |C_2| \Rightarrow y = x(C_1 + \arcsin(C_2/x)).$$

1.8 Метод интегрируемых комбинаций

Определение 1.3. Если в уравнении

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.45}$$

левая часть является точной производной от некоторой функции $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, т.е.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

то

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C_1 \tag{1.46}$$

будет *первым интегралом* уравнения (1.45). Может случиться, что уравнение (1.46), в свою очередь, является уравнением в точных производных. Тогда мы найдем *второй интеграл* уравнения (1.45).

Если уравнение (1.45) не является уравнением в точных производных, то нужно попытаться подобрать такую функцию $\mu = \mu(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ - *интегрирующий множитель* уравнения (1.45), чтобы после умножения на нее уравнение (1.45) стало уравнением в точных производных.

Пример 10. Найти общее решение уравнения

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1+y^2} = 0. \tag{1.47}$$

Решение. Так как в левой части у каждой из дробей в числителе стоит производная от знаменателя, то мы имеем

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1+y^2} = (\ln |y'| - \ln(1+y^2))',$$

т.е. уравнение (1.47) является уравнением в точных производных. Оно имеет первый интеграл

$$\ln |y'| - \ln(1 + y^2) = \ln |C_1| \quad \text{или} \quad y' = A(1 + y^2), \quad A = \pm C_1.$$

Интегрируя еще раз, находим

$$\operatorname{arctg} y = Ax + B.$$

Это общий интеграл уравнения (1.47).

Пример 11. Найти общее решение уравнения

$$yy'' = y'^2. \quad (1.48)$$

Решение. Это уравнение не является уравнением в точных производных, но, умножив обе его части на функцию $\mu = 1/(yy')$, получим уравнение в точных производных

$$y''/y' = y'/y.$$

Его первым интегралом будет $y' = C_1 y$, откуда

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Найти решения уравнений:

1. $y'' = xe^x, y(1) = 1, y'(1) = 2.$
2. $x^3 y^{IV} = 1; y = 2x(\ln x - 1) + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$
3. $x = e^{-y''} + y''.$
4. $x - \sin y'' + 2y'' = 0.$
5. $y''' \operatorname{tg} 3x = 3y''.$
6. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 2x.$
7. $x^4 y'' + x^3 y' = 1.$
8. $y'' = 2yy'.$
9. $y^3 y'' = 1.$
10. $y'' = 8 \sin^3 y \cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 2.$
11. $y^3 y'' = 4(y^4 - 1), y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}.$
12. $y''' + y''^3 = 0.$
13. $y''^2 - 3y' + 2 = 0.$
14. $y'''^2 + y''^2 = 1.$

15. $yy' = \sqrt{y^2 + y'^2}y'' - y'y''$.
16. $x^2y''y - (x^2 + 1)y'^2 = 0$.
17. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.
18. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3$.
19. $y'' = (2xy - \frac{5}{x})y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}$.
20. $y'' = y'^2y$.
21. $(1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0$.
22. $y'' + y' \cos x - y \sin x = 0$.

ОТВЕТЫ:

1. $y = e^x(x - 2) + 2x + e - 1$.
2. $y = 2x(\ln x - 1) + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$.
3.
$$\begin{cases} x = e^{-t} + t, \\ y = (\frac{t}{2} + \frac{3}{4})e^{-2t} + (\frac{t^2}{2} - 1 + C_1)e^{-t} + \frac{t^3}{6} + C_1t + C_2. \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} x = \sin t - 2t, \\ y = \frac{3}{8}\sin 2t - \frac{t}{4}\cos 2t + (C_1 - 2 - t^2)\sin t + (-2C_1 + \frac{1}{2})t + \frac{2t^3}{3} + C_2. \end{cases}$$
5. $y = -\frac{C_0}{9}\sin 3x + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$.
6. $y = x + C_0 \operatorname{arctg} x + C_1$.
7. $y = \frac{1}{4x^2} + C_0 \ln x + C_1$.
8. $\ln \frac{y-C_1}{y+C_2} = 2C_1x + C_2$.
9. $\sqrt{C_0^2y^2 - 1} = \pm C_0^2x + C_1$.
10. $\operatorname{ctg} y = 2(1 - x)$.
11. $y^2 - 1 = e^{4x}$.
12. $y = t^{-3}/3 + C_1t^{-2}/2 + C_3, \quad x = t^{-2}/2 + C_1$.
13. $y = \frac{2}{3}x + C, \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3}p + C_1, \\ y = \frac{2p^3}{27} + \frac{4}{9}p + C_0. \end{cases}$
14. $y = \sin(x + C_1) + C_2x + C_3$.
15. $y = \frac{C_1(1+C_2e^x)}{1-C_2e^x}, \quad y = C$.
16. $\ln y = x/C_1 - \frac{\ln|1+C_1x|}{C_1^2} + C_2, \quad y = C_0e^{x^2/2}$.
17. $y = C_2xe^{-C_1/x}$.
18. $2C_1C_2y = C_2^2|x|^{2+C_1} + |x|^{2-C_1}$.
19. $x^2y = C_1 \operatorname{tg}(C_1 \ln C_2x), \quad C_2(x^2y + C_1)|x|^{2C_1} = x^2y - C_1$.
20. $\int e^{-y^2/2}dy = C_1x + C_2$.

21. $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = C_3^2.$

22. $y = e^{-\sin x} (C_2 + C_1 \int e^{\sin x} dx).$

Глава 2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

2.1 Однородные уравнения. Метод Эйлера

Определение 2.1. Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (2.1)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n - постоянные вещественные числа, называется линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами.

Это уравнение имеет фундаментальную систему решений y_1, y_2, \dots, y_n , определенную при всех x и состоящую из степенных, показательных и тригонометрических функций. Ей соответствует общее решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

Чтобы решить уравнение (2.1), надо составить *характеристическое уравнение*

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (2.2)$$

и найти его корни - *характеристические числа* уравнения (2.2).

Структура фундаментальной системы уравнений зависит от вида характеристических чисел уравнения (2.2). Различают три случая.

1. *Все корни характеристического уравнения различны и вещественны.* Обозначим их через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда фундаментальной системой решений будет $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$, а общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2. Все корни характеристического уравнения различны, но среди них имеются комплексные. Пусть $\lambda_1 = a + bi$ - комплексный корень характеристического уравнения. Тогда $\lambda_2 = a - bi$ тоже будет корнем этого уравнения. Этим двум корням соответствуют два линейно независимых частных решения:

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_2 = e^{ax} \sin bx.$$

Записав линейно независимые частные решения, соответствующие другим сопряженным парам комплексных корней и всем вещественным корням, получим фундаментальную систему решений. Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами даст общее решение уравнения (2.1). При этом корням $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ в формуле общего решения соответствует выражение вида

$$e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

3. Среди корней характеристического уравнения имеются кратные. Пусть λ_1 - вещественный k -кратный корень. Тогда ему соответствует k линейно независимых частных решений вида $e^{\lambda_1 x}$, $x e^{\lambda_1 x}$, ..., $x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$, в формуле общего решения - выражение вида $e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1})$.

Если $\lambda_1 = a + bi$ - комплексный корень характеристического уравнения кратности k , то ему и сопряженному с ним корню $\lambda_2 = a - bi$ той же кратности соответствует $2k$ линейно независимых частных решения вида

$$\begin{cases} e^{ax} \cos bx, x e^{ax} \cos bx, \dots, x^{k-1} e^{ax} \cos bx, \\ e^{ax} \sin bx, x e^{ax} \sin bx, \dots, x^{k-1} e^{ax} \sin bx. \end{cases}$$

В формуле общего решения этим корням соответствует выражение вида

$$e^{ax}((C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) \cos bx + (C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) \sin bx).$$

Записав линейно независимые частные решения указанного выше вида, соответствующие всем простым и кратным вещественным корням, а также сопряженным парам простых и кратных комплексных корней, получим фундаментальную систему решений.

Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами даст общее решение уравнения (2.1).

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0. \quad (2.3)$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

имеет различные вещественные корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, поэтому совокупность функций $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{2x}$ будет фундаментальной системой решений, а

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$$

является общим решением уравнения (2.3).

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0. \quad (2.4)$$

Решение. Его характеристическим уравнением будет

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = 0.$$

Разлагаем левую часть на множители:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0.$$

Найдем корни уравнения $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$. Здесь $a = 1$, $b = 4$ и $c = 13$. Дискриминант $D = b^2 - 4ac = -36$, корни $\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = -2 + \sqrt{-36}/2 = -2 + 3\sqrt{-1} = -2 + 3i$ и $\lambda_3 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = -2 - \sqrt{-36}/2 = -2 - 3i$.

Таким образом, характеристическое уравнение имеет один вещественный корень $\lambda_1 = 1$ и два комплексно-сопряженных корня $\lambda_2 = -2 + 3i$, $\lambda_3 = -2 - 3i$. Поэтому функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x} \cos 3x$, $y_3 = e^{-2x} \sin 3x$ образуют фундаментальную систему решений, а

$$y = C_1 e^x + e^{-2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)$$

является общим решением уравнения (2.4).

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0.$$

Разлагаем левую часть на множители:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0,$$

отсюда характеристические корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Один корень простой, другой – двукратный. Поэтому $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = xe^{2x}$. Общее решение

$$y = C_1 e^x + e^{2x}(C_2 + C_3 x).$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0.$$

Разлагаем левую часть на множители:

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 + i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1 - i$ – это случай двукратных комплексно-сопряженных корней. Поэтому

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x} \cos x, & y_2 = xe^{-x} \cos x, \\ y_3 = e^{-x} \sin x, & y_4 = xe^{-x} \sin x \end{cases}$$

и

$$y = e^{-x}((C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x).$$

Пример 5. Найти решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} y(2) = 1, \\ y'(2) = -2. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Разлагаем левую часть на множители:

$$(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Уравнение имеет один вещественный корень $\lambda = 1$ кратности $k = 2$. Поэтому общее решение имеет вид

$$y = (C_1 + C_2x)e^x.$$

Подставив в общее решение поочередно начальные условия, получим систему уравнений на C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} (C_1 + 2C_2)e^2 = 1, \\ (C_1 + C_2 + 2C_2)e^2 = -2. \end{cases}$$

Решаем систему $C_1 = 7e^{-2}$, $C_2 = -3e^{-2}$. Подставляем значения C_1 и C_2 в общее решение и получаем искомое

$$y = (7 - 3x)e^{x-2}.$$

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV} + 16y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda = (-16)^{1/4}.$$

Извлечем степень $1/4$ из числа -16 . Для этого сначала запишем число -16 в тригонометрической форме, используя формулу перехода

$$z = x + iy = r[\cos(\varphi + 2\pi n) + i \sin(\varphi + 2\pi n)],$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, \quad y \geq 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, \quad y < 0; \\ \pi/2, & x = 0, \quad y > 0; \\ -\pi/2, & x = 0, \quad y < 0; \end{cases}$$

и формулу

$$\omega_n = r^{1/k} \left[\cos \frac{\varphi + 2\pi n}{k} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi n}{k} \right], \quad n = 0, 1, \dots, k-1.$$

Отсюда найдем

$$-16 = 16[\cos(\pi + 2\pi n) + i \sin(\pi + 2\pi n)];$$

$$\lambda_n = \{(-16)^{1/4}\}_n = 2 \left[\cos \frac{\pi + 2\pi n}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi n}{4} \right], \quad n = 0, 1, 2, 3. \Rightarrow$$

$$n = 0: \quad \lambda_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$n = 1: \quad \lambda_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$n = 2: \quad \lambda_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$n = 3: \quad \lambda_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Паре комплексно сопряженных чисел λ_0 и λ_3 соответствуют два частных решения:

$$y_1 = e^{\sqrt{2}x} \sin \sqrt{2}x, \quad y_2 = e^{\sqrt{2}x} \cos \sqrt{2}x.$$

Для λ_1 и λ_2

$$y_3 = e^{-\sqrt{2}x} \sin \sqrt{2}x, \quad y_4 = e^{-\sqrt{2}x} \cos \sqrt{2}x.$$

Общее решение

$$y = C_1 e^{\sqrt{2}x} \sin \sqrt{2}x + C_2 e^{\sqrt{2}x} \cos \sqrt{2}x + C_3 e^{-\sqrt{2}x} \sin \sqrt{2}x + C_4 e^{-\sqrt{2}x} \cos \sqrt{2}x.$$

Найти решения уравнений:

23. $y'' - 6y' + 8y = 0.$

24. $y'' - 16y = 0.$

25. $y'' - y' - 2y = 0$.
 26. $y'' + y' = 0$.
 27. $y'' - y' + y = 0$.
 28. $y'' + 2y' + 2y = 0$.
 29. $y'' + \pi^2 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$.
 30. $y'' + 4y' + 4y = 0$.
 31. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.
 32. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$.
 33. $y''' + 8y = 0$.
 34. $y^{IV} - y = 0$.

Ответы: 23. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}$. 24. $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{4x}$. 25. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$. 26. $y = C_1 + C_2 e^{-x}$. 27. $y = e^{x/2} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$. 28. $y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. 29. $y = -\frac{1}{\pi} \sin \pi x$. 30. $y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x)$. 31. $y = e^{-x} (C_1 + C_2 x) + C_3 + C_4 x$. 32. $y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x$. 33. $y = e^x (C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x) + C_3 e^{-2x}$. 34. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

2.2 Неоднородные уравнения

Неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (2.5)$$

решается в два этапа. На первом этапе находится общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

На втором этапе находится частное решение y_1 уравнения (2.5). Сумма

$$y = y_0 + y_1$$

есть общее решение уравнения (2.5). Здесь будет рассмотрено два метода нахождения частного решения неоднородного уравнения – метод неопределенных коэффициентов и метод вариации постоянных.

Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод можно использовать в следующих случаях:

1. $f(x) = P(x)$, где $P(x)$ - полином от x . Данной функции соответствует число $\gamma = 0$. Если число $\gamma = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (2.5) можно найти в виде $y_1 = Q(x)$, где $Q(x)$ - полином той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами. Если число γ является корнем характеристического уравнения кратности k , то $y_1 = x^k Q(x)$;

2. $f(x) = P(x)e^{ax}$. Функции этого вида соответствует число $\gamma = a$. Если число $\gamma = a$ не является корнем характеристического уравнения, то $y_1 = Q(x)e^{ax}$. Если γ есть корень характеристического уравнения кратности k , то $y_1 = x^k Q(x)$;

3. $f(x) = e^{ax}(P_1(x) \cos bx + P_2(x) \sin bx)$, $P_1(x)$ и $P_2(x)$ - полиномы от x . Соответствующие числа — $\gamma = a \pm ib$. Пусть m есть наивысшая из степеней полиномов $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Если число γ не является корнем характеристического уравнения, то

$$y_1 = e^{ax}(Q_1(x) \cos bx + Q_2(x) \sin bx),$$

где $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ - полиномы степени m с неопределенными коэффициентами. Если γ есть корень характеристического уравнения кратности k , то

$$y_1 = x^k e^{ax}(Q_1(x) \cos bx + Q_2(x) \sin bx);$$

4. $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x)$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$, \dots , $f_m(x)$ - функции вида, рассмотренного в пп. 1 – 3. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$, \dots , $y_m(x)$ - частные решения, соответствующие функциям $f_1(x)$, $f_2(x)$, \dots , $f_m(x)$, то

$$Y_1 = y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_m(x)$$

является частным решением всего уравнения (2.5).

Примеры соответствия:

$$x^2 + x - 1 \rightarrow \gamma = 0;$$

$$(x^3 + x)e^{2x} \rightarrow \gamma = 2;$$

$$(x + 2) \cos 3x \rightarrow \gamma = \pm 3i; \quad 5 \cos 3x - 4 \sin 3x \rightarrow \gamma = \pm 3i;$$

$$e^x(5 \cos 2x - 4 \sin 2x) \rightarrow \gamma = 1 \pm 2i;$$

$$\begin{aligned}
e^x + x^2 - x &\rightarrow \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 0; \\
e^x + xe^{-x} &\rightarrow \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = -1; \\
e^x \sin x + e^{-x} \cos x &\rightarrow \gamma_1 = 1 \pm i, \quad \gamma_2 = -1 \pm i; \\
\sin 2x + \cos 3x &\rightarrow \gamma_1 = \pm 2i, \quad \gamma_2 = \pm 3i;
\end{aligned}$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y = x^2. \quad (2.6)$$

Решение. Соответствующим однородным уравнением будет

$$y'' - y = 0. \quad (2.7)$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad (2.8)$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Поэтому

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \quad (2.9)$$

Найдем частное решение уравнения (2.6). Правой части уравнения (2.6) соответствует число $\gamma = 0$, которое не является корнем характеристического уравнения (2.8). Следовательно, ищем частное решение в виде

$$y_1 = Ax^2 + Bx + C.$$

Подставляем y_1'' и y_1 в уравнение (2.8), имеем

$$2A - Ax^2 - Bx - C = x^2.$$

Приравниваем коэффициенты при подобных степенях и получаем систему уравнений на A , B и C :

$$\begin{aligned}
\text{при } x^0: \quad & 2A - C = 0, \\
\text{при } x: \quad & -B = 0, \\
\text{при } x^2: \quad & -A = 1.
\end{aligned}$$

Отсюда $A = -1$, $B = 0$, $C = -2$. Частное решение –

$$y_1 = -x^2 - 2. \quad (2.10)$$

Прибавляя к этому частному решению общее решение (2.9) уравнения (2.7), получаем общее решение уравнения (2.6):

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - 2.$$

Пример 8. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = 4xe^x. \quad (2.11)$$

Решение. Соответствующим однородным уравнением будет

$$y'' + y = 0. \quad (2.12)$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad (2.13)$$

имеет корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Поэтому

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \quad (2.14)$$

Найдем частное решение уравнения (2.11). Функции $4xe^x$ соответствует число $\gamma = 1$, которое не является корнем характеристического уравнения (2.13), значит, частное решение ищем в виде

$$y_1 = e^x(Ax + B). \quad (2.15)$$

Подставляем y_1 и y_1'' в уравнение (2.11), получаем

$$e^x(2Ax + 2A + 2B) = 4xe^x.$$

Приравниваем коэффициенты при подобных степенях и получаем систему уравнений на A и B :

$$\text{при } x^0: \quad 2A + 2B = 0,$$

$$\text{при } x: \quad 2A = 4.$$

Отсюда $A = 2$, $B = -2$. Частное решение –

$$y_1 = (2x - 2)e^x.$$

Общее решение уравнения (2.11) –

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x - 2)e^x.$$

Пример 9. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y' = e^x + e^{2x} + x. \quad (2.16)$$

Решение. Соответствующим однородным уравнением будет

$$y'' - y' = 0. \quad (2.17)$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \quad (2.18)$$

имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Поэтому

$$y_0 = C_1 + C_2 e^x. \quad (2.19)$$

Найдем частное решение уравнения (2.16). Для этого отыщем сначала частные решения для каждого из трех уравнений:

$$y'' - y' = e^x, \quad y'' - y' = e^{2x}, \quad y'' - y' = x.$$

Рассмотрим уравнение

$$y'' - y' = e^x \quad (2.20)$$

Функции e^x соответствует число $\gamma = 1$, которое является корнем характеристического уравнения кратности 1, следовательно, частное решение ищем в виде

$$y_1 = A x e^x. \quad (2.21)$$

Подставляем функцию (2.21) в уравнение (2.20), получаем $A e^x = e^x$. Отсюда $A = 1$. Следовательно,

$$y_1 = x e^x. \quad (2.22)$$

Уравнение

$$y'' - y' = e^{2x} \quad (2.23)$$

имеет частное решение вида

$$y_2 = A e^{2x}, \quad (2.24)$$

ибо число $\gamma = 2$ не является корнем характеристического уравнения. Подставив функцию (2.24) в уравнение (2.23), найдем $A = 1/2$, так что

$$y_2 = \frac{1}{2} e^{2x}. \quad (2.25)$$

Уравнение

$$y'' - y' = x \quad (2.26)$$

имеет частное решение вида

$$y_3 = x(Ax + B), \quad (2.27)$$

так как число $\gamma = 0$ является простым корнем характеристического уравнения. Подставляя функцию (2.27) в уравнение (2.26), имеем:

$$-2Ax - B + 2A = x \Rightarrow -2A = 1, \quad -B + 2A = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, \quad B = -1,$$

следовательно,

$$y_3 = -x \left(\frac{1}{2}x + 1 \right). \quad (2.28)$$

Теперь, складывая частные решения (2.22), (2.25) и (2.28), находим частное решение Y_1 всего уравнения (2.16) в виде

$$Y_1 = xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - x \left(\frac{1}{2}x + 1 \right).$$

Прибавляя к этому частному решению общее решение (2.19) уравнения (2.17), получаем общее решение уравнения (2.16):

$$y = xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - x \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) + C_1 + C_2e^x.$$

Пример 10. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \sin x + e^x \cos 2x. \quad (2.29)$$

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + y = 0; \quad \lambda^2 + 1 = 0; \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i;$$

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Найдем частное решение для уравнения

$$y'' + y = \sin x. \quad (2.30)$$

Так как функции $\sin x$ соответствует число $\gamma = \pm i$, которое является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y_1 = x(A \cos x + B \sin x). \quad (2.31)$$

Подставляем функцию (2.31) в уравнение (2.30):

$$-2A \sin x + 2B \cos x = \sin x.$$

Приравниваем коэффициенты при подобных функциях и получаем систему уравнений на A и B :

$$\text{при } \cos x: \quad 2B = 0,$$

$$\text{при } \sin x: \quad -2A = 1.$$

Отсюда $A = -1/2$, $B = 0$. Частное решение

$$y_1 = -\frac{1}{2}x \cos x.$$

Для уравнения

$$y'' + y = e^x \cos 2x \quad (2.32)$$

имеем частное решение

$$y_2 = e^x(A \cos 2x + B \sin 2x), \quad (2.33)$$

ибо здесь число $\gamma = 1 \pm i \cdot 2$ не является корнем характеристического уравнения.

Подставив функцию (2.33) в уравнение (2.32), найдем $A = -1/10$, $B = 1/5$, так что

$$y_2 = e^x \left(-\frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x \right).$$

Теперь мы можем записать общее решение уравнение (2.29) в виде

$$y = -\frac{1}{2}x \cos x + e^x \left(-\frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x \right) + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Найти решения уравнений:

35. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

36. $y''' + y'' = 10 - 24x$.

37. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$.

38. $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.

39. $y'' - 7y' + 12y = e^{2x}(1 - 2x)$.

40. $y'' + 9y = 2 \cos 3x - 3 \sin 3x$.

$$41. y'' - y = 2x \sin x.$$

$$42. y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x.$$

$$43. y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x.$$

$$44. y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + x/2.$$

$$45. y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x.$$

$$46. y'' - 2y' - 8y = e^x - 8 \cos 2x.$$

Ответы: 35. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$. 36. $y = C_1e^{-x} + C_2 + C_3x - 4x^3 + 17x^2$. 37. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$. 38. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + x\left(\frac{x}{10} - \frac{1}{25}\right)e^{2x}$. 39. $y = C_1e^{4x} + C_2e^{3x} - e^{2x}(x + 1)$. 40. $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x + x\left(\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x\right)$. 41. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - x \sin x - \cos x$. 42. $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{12}e^{-3x} \cos 4x$. 43. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20}(\sin 2x + 2 \cos 2x)$. 44. $y = (C_1 + C_2x + x^2)e^{2x} + \frac{x+1}{8}$. 45. $y = C_1e^{-x} + C_2 + C_3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + e^x\left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right)$. 46. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{4x} - \frac{1}{9}e^x + \frac{1}{5}(3 \cos 2x + \sin 2x)$.

Метод вариации постоянных

Неоднородное уравнение (2.5) с любой правой частью $f(x)$ может быть решено методом вариации постоянных. Сначала находим общее решение

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$$

соответствующего однородного уравнения. Тогда общее решение уравнения (2.5) ищется в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n.$$

Найти решения уравнений:

47. $y'' + y = 1/\sin x$.

48. $y'' + 2y' + y = e^{-x}/x$.

49. $y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x}(2 + e^{2x})^{-1}$.

Ответы: 47. $y = (C_1 + \ln |\sin x|) \sin x + (C_2 - x) \cos x$. 48. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + xe^{-x} \ln |x|$. 49. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-4x} - e^{-2x} \ln[(e^{2x} + 2)e^{2x}] - e^{-4x} \ln(e^{2x} + 2)$.

2.3 Уравнение Эйлера

Определение 2.2. Уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \quad (2.36)$$

называется уравнением Эйлера.

Уравнение Эйлера сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = -e^t$ при $x < 0$). Для полученного уравнения с постоянными коэффициентами характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - n + 1) + \dots + a_{n-2} \lambda(\lambda - 1) + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

При составлении этого уравнения каждое произведение $x^k y^{(k)}$ в уравнении (2.36) заменяется на произведение k убывающих на 1 чисел: $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - k + 1)$.

Пример 12. Найти общее решение уравнения

$$x^3 y''' - x^2 y'' + 2x y' - 2y = x^3. \quad (2.37)$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - \lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \quad (2.38)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2.$$

Отсюда общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y_0 = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}.$$

Чтобы решить неоднородное уравнение (2.37), сначала раскроем скобки в выражении (2.38):

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

Используя это характеристическое уравнение, составляем левую часть дифференциального уравнения, а правую часть получаем из правой части (2.37) заменой $x = e^t$:

$$y_t''' - 4y_t'' + 5y_t' - 2y = e^{3t}.$$

Функции e^{3t} соответствует число 3, которое не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде $y_1 = Ae^{3t}$. Подставляя y_1 в уравнение, находим $A = 1/4$.

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t} = (C_1 + C_2 \ln x)x + C_3 x^2 + \frac{1}{4}x^3 \quad (x > 0).$$

При $x < 0$ получается аналогичная формула, но с $\ln |x|$ вместо $\ln x$.

Найти решения уравнений:

50. $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$.

51. $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$.

52. $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3$.

53. $x^2 y'' - 2y = \sin \ln x$.

54. $(2x + 3)^3 y''' + 3(2x + 3)y' - 6y = 0$.

Ответы: 50. $y = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x}$.

51. $y = C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \sin(2 \ln x)$.

52. $y = x(C_1 + C_2 \ln |x|) + 2x^3$.

53. $y = C_1 x^2 + C_2 x^{-1} + 0,1 \cos \ln x - 0,3 \sin \ln x$.

54. $y = C_1 \left(x + \frac{3}{2}\right) + C_2 \left|x + \frac{3}{2}\right|^{3/2} + C_3 \left|x + \frac{3}{2}\right|^{1/2}$.

Глава 3. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

3.1 Формула Остроградского - Лиувилля

Для однородного уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (3.1)$$

не существует общих методов построения фундаментальной системы решений. Иногда одно или несколько частных решений удается угадать.

Если известно частное решение $y_1(x)$ уравнения (3.1), то его порядок можно понизить, сохраняя линейность уравнения. Для этого в уравнение надо подставить $y = y_1z$ и затем сделать замену $z' = u$.

В случае уравнения второго порядка

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (3.2)$$

можно также воспользоваться формулой Остроградского - Лиувилля

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C \exp\left(-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx\right), \quad (3.3)$$

где y_1 и y_2 - любые два решения данного уравнения.

Для уравнения n -го порядка (3.1) формула Остроградского - Лиувилля имеет вид

$$\begin{vmatrix} y_1 \dots y_n \\ y_1' \dots y_n' \\ y_1^{(n-1)} \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = C \exp\left(-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx\right), \quad (3.4)$$

где набор функций

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \quad (3.5)$$

$$= \frac{C_1}{4} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{(x+2)} \right) + C_2.$$

Общее решение уравнения (3.7) имеет вид

$$y_2(x) = -\frac{C_1}{2x} + C_2(x+2).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0, \quad (3.8)$$

если известны частные решения $y_1 = 1/x$ и $y_2 = x$.

Решение. Делаем замену $y = y_2z = xz$, затем $u = z'$. В результате уравнение (3.8) примет вид

$$x^2(2x-1)u'' + (10x^2-6x)u' + (6x-6)z' = 0.$$

Частное решение y_1 после замены примет вид $u_1 = -\frac{2}{x^3}$.

По формуле Остроградского - Лиувилля (3.3):

$$\begin{vmatrix} u_1 & u \\ u_1' & u' \end{vmatrix} = C \exp \left(- \int \frac{10x^2-6x}{x^2(2x-1)} dx \right).$$

Выделим производную $\left(\frac{u}{u_1}\right)'$ и проинтегрируем выражение в показателе экспоненты

$$\left(\frac{u}{u_1}\right)' = \frac{C}{u_1^2} \cdot \frac{(2x-1)}{x^6}.$$

Подставим u_1 и проинтегрируем

$$u = -\frac{C_1}{x^3}(2x-1)^2 + \frac{C_2}{x^3}.$$

Возвращаемся к переменной z :

$$\begin{aligned} z &= -C_1 \int \frac{(2x-1)^2}{x^3} dx + C_2 \int \frac{dx}{x^3} + C_3 = \\ &= C_1 \left(\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{8x^2} \right) + \frac{C_2}{x^2} + C_3. \end{aligned}$$

Возвращаемся к старой функции y и получаем общее решение уравнения (3.8):

$$y = C_1(x \ln|x| + 1) + \frac{C_2}{x} + xC_3.$$

Для решения неоднородного уравнения (3.6) можно использовать следующее замечание:

Замечание 1. Пусть функции u_1 и u_2 являются частными решениям неоднородного уравнения (3.6), тогда их разность $y = u_1 - u_2$ есть решение соответствующего однородного уравнения (3.1).

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 6x, \quad (3.9)$$

если известны частные решения $u_1 = x$ и $u_2 = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0. \quad (3.10)$$

Учитывая замечание (1), находим частное решение уравнения (3.10):

$$y_1 = u_2 - u_1 = \frac{1}{x + 1}.$$

Используя формулу Остроградского - Лиувилля (3.3), запишем общее решение уравнения (3.10):

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = C_1(x+1)^2 \exp\left(-\int \frac{4x dx}{x^2 - 1}\right) \Rightarrow \left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C_1}{(x-1)^2} \Rightarrow y = \frac{C_1}{x+1} + \frac{C_2}{x-1}.$$

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения (3.9) используем метод вариации постоянных. Решение ищем в виде

$$y = \frac{C_1(x)}{x+1} + \frac{C_2(x)}{x-1}. \quad (3.11)$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определим из системы

$$\begin{cases} \frac{C_1'(x)}{x+1} + \frac{C_2'(x)}{x-1} = 0, \\ -\frac{C_1'(x)}{(x+1)^2} - \frac{C_2'(x)}{(x-1)^2} = \frac{6x}{x^2-1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = 3x(x+1), \\ C_2' = 3x(x-1). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C_1, \\ C_2(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C_2. \end{cases}$$

Подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу (3.11) и получим искомое решение:

$$y = \frac{C_1}{x+1} + \frac{C_2}{x-1} + \frac{x^3}{x^2-1}.$$

Найти решения уравнений:

55. $xy'' + 2y' - xy = 0, y_1 = e^x/x.$

56. $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0, y_1 = \operatorname{tg} x.$

$$57. xy''' - y'' - xy' + y = 0, y_1 = x, y_2 = e^x.$$

$$58. x^2(2x - 1)y''' + (4x - 3)xy'' - 2xy' + 2y = 0, y_1 = x, y_2 = 1/x.$$

$$59. (3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2, y_1 = 2x, y_2 = (x + 1)^2.$$

Ответы:

$$55. xy = C_1e^{-x} + C_2e^x.$$

$$56. y = C_1 \operatorname{tg} x + C_2(1 + x) \operatorname{tg} x.$$

$$57. y = C_1x + C_2e^x + C_3e^{-x}.$$

$$58. y = C_1x + C_2x^{-1} + C_3(x \ln |x| + 1).$$

$$59. y = C_1(x^2 + 1) + C_2x^{-1} + 2x.$$

3.2 Методы нахождения частных решений

В некоторых случаях частное решение удается найти путем подбора.

Пример 3. Найти частное решение уравнения

$$(2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0, \quad (3.12)$$

являющееся алгебраическим многочленом (если такое решение существует).

Решение. Определим степень многочлена. Пусть

$$y = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Подставим y в уравнение, получим

$$(2x + 1)[n(n - 1)x^{n-2} + \dots] + (4x - 2)[nx^{n-1} + \dots] - 8[x^n + \dots] = 0.$$

Приравниваем нулю коэффициент при самой старшей степени x^n , будем иметь

$$4n - 8 = 0,$$

откуда $n = 2$. Таким образом, многочлен может быть лишь второй степени, то есть $y = x^2 + ax + b$. Подставляем в уравнение (3.12):

$$4ax + 2 - 2a - 8b = 0.$$

Следовательно, $a = 0$, $2 - 2a - 8b = 0$. Отсюда $b = 1/4$. Частное решение имеет вид

$$y = x^2 + \frac{1}{4}.$$

Пример 4. Найти частное решение уравнения

$$xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0. \quad (3.13)$$

Решение. Предположим, что частное решение имеет вид многочлена относительно x :

$$y = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_nx + a_n.$$

Подставим y в уравнение, получим

$$x[n(n-1)x^{n-2} + \dots] - (2x+1)[nx^{n-1} + \dots] + (x+1)[x^n + \dots] = 0.$$

Приравниваем нулю коэффициент при старшей степени x^{n+1}

$$1 = 0.$$

Так как получили противоречие, то частного решения в виде многочлена не существует.

Будем искать решение в виде

$$y = e^{kx}.$$

Подставим в уравнение

$$x(k-1)^2 - (k-1) = 0 \Rightarrow k = 1.$$

Частное решение имеет вид

$$y = e^x.$$

Найти решения уравнений:

60. $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0.$

61. $(x^2-1)y'' + (x-3)y' - y = 0.$

62. $x(x^2+6)y'' - 4(x^2+3y' + 6xy) = 0.$

63. $x^2 \ln xy'' - xy' + y = 0.$

Ответы:

60. $y = C_1e^{2x} + C_2(3x+1)e^{-x}.$

61. $y = C_1(x-3) + \frac{C_2}{x+1}.$

62. $y = C_1(x^2+2) + C_2x^3.$

63. $y = C_1x + C_2(\ln x + 1).$

Глава 4. Интегрирование линейных уравнений методом степенных рядов

4.1 Нахождение решений однородных линейных уравнений второго порядка в виде степенных рядов

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (4.1)$$

с начальными условиями

$$y = y_0, y' = y'_0 \quad \text{при} \quad x = x_0, \quad (4.2)$$

где y_0, y'_0 - произвольные вещественные числа.

Теорема 1. Пусть функции $p(x)$ и $q(x)$ - голоморфны в окрестности точки x_0 , то есть разлагаются в степенные ряды вида

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x - x_0)^k; \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x - x_0)^k, \quad (4.3)$$

сходящиеся на интервале $|x - x_0| < r$. Тогда задача Коши для уравнения (4.1) с начальными условиями (4.2) имеет единственное решение $y = y(x)$, которое разлагается в степенной ряд

$$y(x) = y_0 + y'_0(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} C_k(x - x_0)^k, \quad (4.4)$$

сходящийся, по крайней мере, на том же интервале, что и ряды (4.3).

Если заданы числа y_0 и y'_0 , коэффициенты C_k ряда (4.4) определяются однозначно, например, подстановкой ряда (4.4) в уравнение (4.1) и приравниванием нулю коэффициентов при различных степенях $x - x_0$ в левой части полученного равенства (*метод неопределенных коэффициентов*).

В приложениях чаще всего встречаются случаи, когда $p(x)$ и $q(x)$ либо полиномы, либо отношение полиномов. В первом случае ряд (4.4) сходится при всех значениях x . Во втором случае его радиус сходимости совпадает с расстоянием от точки x_0 до ближайшего из полюсов функций $p(z)$ и $q(z)$, рассматриваемых на комплексной плоскости z .

Для построения общего решения уравнения (4.1) достаточно найти два линейно независимых частных решения y_1 и y_2 . Обычно строят фундаментальную систему решений y_1 и y_2 , нормированную в точке $x = x_0$, так что $y_1 = 1, y'_1 = 0$ при $x = x_0$; $y_2 = 0, y'_2 = 1$ при $x = x_0$.

Если ряд (4.4), представляющий решение уравнения (4.1), удастся просуммировать, т. е. выразить его сумму через элементарные функции, то второе частное решение можно найти по формуле (3.3).

Метод степенных рядов применяется и для решения линейных уравнений произвольного порядка n

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

с голоморфными коэффициентами $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ и правой частью $f(x)$. При этом решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при } x = x_0,$$

записывается так:

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + \sum_{k=n}^{\infty} C_k(x - x_0)^k,$$

где $|x - x_0| < r$.

Пример 1. Найти методом степенных рядов решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 1; y'(0) = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=2}^{\infty} b_k x^k. \quad (4.9)$$

Найдем $y_1(x)$. Подставляя ряд (4.8) в уравнение (4.7), получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty} [a_k k(k-1)x^{k-2} - a_k x^{k+1}] - x = 0.$$

Поэтому коэффициенты a_k определяются из системы

$$\begin{aligned} \text{при } x^0: \quad a_2 &= 0, \\ \text{при } x: \quad 3 \cdot 2 \cdot a_3 &= 1, \\ \text{при } x^2: \quad a_4 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \text{при } x^k: \quad k(k-1)a_k - a_{k-3} &= 0; \quad k = 5, 6, \dots \end{aligned}$$

и имеют вид

$$a_{3k} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3k-1)3k}, \quad a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0.$$

Таким образом,

$$y_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3k-1)3k} + 1.$$

Аналогично находим $y_2(x)$:

$$y_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots 3k(3k+1)} + x.$$

Общее решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 3. Найти фундаментальную систему решений y_1, y_2 , нормированную в точке $x = 0$, методом степенных рядов и построить общее решение для уравнения

$$(1 - x^2)y'' - xy' - y = 0. \quad (4.10)$$

Задача сводится к нахождению двух частных решений y_1 и y_2 , удовлетворяющих начальным условиям

$$y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0; y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1.$$

Убедимся, что решения y_1 и y_2 существуют. Перепишем уравнение (4.10) в виде

$$y'' - \frac{x}{1-x^2}y' - \frac{1}{1-x^2}y = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения разлагаются в ряды по степеням x , сходящиеся в области $|x| < 1$. Поэтому y_1 и y_2 существуют, причем ряды, представляющие их, сходятся, по крайней мере, при $|x| < 1$.

По формуле (4.4)

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k, \quad (4.11)$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=2}^{\infty} b_k x^k. \quad (4.12)$$

Найдем $y_1(x)$. Подставляя ряд (4.11) в уравнение (4.10), получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty} [-a_k(k^2 + 1)x^k + a_k k(k-1)x^{k-2}] - 1 = 0.$$

Поэтому коэффициенты a_k определяются из системы

$$\text{при } x^0: \quad -1 + 2 \cdot 1a_2 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2!};$$

$$\text{при } x: \quad 3 \cdot 2 \cdot a_3 = 0, \quad a_3 = 0;$$

.....

$$\text{при } x^k: \quad (k+2)(k+1)a_{k+2} - (k^2+1)a_k = 0, \quad k \geq 2$$

и имеют вид

$$\begin{aligned} a_5 = a_7 = \dots = a_{2m+1} = \dots = 0, \\ a_2 = \frac{1+2^2}{4!}, \quad a_6 = \frac{(1+2^2)(1+4^2)}{6!}, \dots, \\ a_{2m} = \frac{(1+2^2)(1+4^2) \dots (1+(2m-2)^2)}{(2m)!}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1+2^2}{4!}x^4 + \dots + \frac{(1+2^2)(1+4^2)\dots(1+(2m-2)^2)}{(2m)!}x^{2m} + \dots,$$

где $|x| < 1$.

Аналогично находим $y_2(x)$:

$$y_2 = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{2(1+3^2)}{5!}x^5 + \dots + \frac{2(1+3^2)\dots(1+(2m-1)^2)}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \dots,$$

где $|x| < 1$.

Общее решение уравнения (4.10) –

$$y = C_1y_1 + C_2y_2.$$

Найти решения уравнений:

64. $y'' + xy' - (2x^2 + 1)y = 0$.

65. $(1 - x)y'' + y = 0$.

Ответы: **64.** $y_1 = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^4}{4!} + \dots$, $y_2 = x + \frac{12}{5!}x^5 + \dots$, $y = C_1y_1 + C_2y_2$.

65. $y_1 = 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{2x^5}{5!} - \dots$, $y_2 = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{2x^4}{4!} - \frac{5x^5}{5!} + \dots$

4.2 Нахождение решений однородных линейных уравнений второго порядка в виде обобщенных степенных рядов

Определение 4.1. Ряд вида

$$(x - x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \quad (c_0 \neq 0), \tag{4.13}$$

где r - заданное число, и степенной ряд сходится в некоторой области $|x - x_0| < R$, называется *обобщенным степенным рядом*.

Если r - целое неотрицательное число, то обобщенный степенной ряд (4.13) обращается в обычный степенной ряд.

Если точка x_0 является особой точкой для функций $p(x)$ и $q(x)$ в уравнении (4.1), то теорема (1) не применима. В этом случае могут существовать решения уравнения (4.1) в виде обобщенных степенных рядов (4.13). Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если коэффициенты уравнения (4.1) представимы в окрестности особой точки $x = x_0$ в виде

$$p(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k}{x - x_0}, \quad q(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k}{(x - x_0)^2}, \quad (4.14)$$

где $p_0^2 + q_0^2 + q_1^2 \neq 0$ и ряды в числителях сходятся в некоторой области $|x - x_0| < R$, то уравнение (4.1) имеет хотя бы одно решение в виде обобщенного степенного ряда:

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \quad (c_0 \neq 0), \quad (4.15)$$

причем входящий в это решение степенной ряд сходится, по крайней мере, в той же области $|x - x_0| < R$, что и ряды в формулах (4.14).

Замечание 1. Если хотя бы одна из функций $p(x)$ и $q(x)$ имеет в знаменателе более высокую степень $x - x_0$, чем это указано в теореме (2), то решение в виде обобщенного степенного ряда не существует. В этом случае, по крайней мере, одно решение имеет вид обобщенного ряда Лорана

$$(x - x_0)^r \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

причем обязательно бесконечно много коэффициентов C_k с отрицательными номерами отлично от нуля.

Для определения коэффициентов c_k нужно подставить ряд (4.15) в уравнение (4.1) и приравнять нулю коэффициенты при различных степенях $x - x_0$. Число r находится из так называемого *определяющего уравнения* в особой точке $x = x_0$:

$$r(r - 1) + p_0 r + q_0 = 0. \quad (4.16)$$

Коэффициенты p_0 и q_0 можно найти по формулам

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)p(x), \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 q(x). \quad (4.17)$$

Уравнение на r можно также получить, приравняв к нулю коэффициенты при наименьшей степени $x - x_0$. В случае, когда корни r_1 и r_2 определяющего уравнения (4.16) различны, уравнение (4.1) всегда имеет решение вида (4.15),

где r есть тот из корней r_1 и r_2 , который имеет большую вещественную часть. Если r_1 этот корень, то решение имеет вид

$$y = (x - x_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} (x - x_0)^k \quad (c_0^{(1)} \neq 0).$$

Утверждение 1. Если разность $r_1 - r_2$ не является целым числом, то уравнение (4.1) имеет два линейно независимых решения y_1 и y_2 в виде обобщенных степенных рядов

$$y_1 = (x - x_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} (x - x_0)^k \quad (c_0^{(1)} \neq 0), \quad (4.18)$$

$$y_2 = (x - x_0)^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} (x - x_0)^k \quad (c_0^{(2)} \neq 0). \quad (4.19)$$

Утверждение 2. Если разность $r_1 - r_2$ - целое число, то существует решение y_1 , являющееся обобщенным степенным рядом вида (4.18), а второе линейно независимое решение имеет вид

$$y_2 = (x - x_0)^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} (x - x_0)^k + \gamma y_1(x) \ln(x - x_0), \quad (4.20)$$

причем при $r_1 - r_2 = 0$ коэффициент $\gamma \neq 0$, то есть в этом случае $y_2(x)$ обязательно содержит $\ln(x - x_0)$.

Пример 4. Найти те решения уравнения, которые выражаются через обобщенные степенные ряды:

$$2x^2 y'' + (3x - 2x^2) y' - (x + 1) y = 0. \quad (4.21)$$

Представим уравнение (4.21) в следующем виде:

$$y'' + \frac{(3/2 - x)}{x} y' + \frac{(-1/2 - x/2)}{x^2} y = 0. \quad (4.22)$$

Коэффициенты $p(x) = \frac{(3/2 - x)}{x}$ и $q(x) = \frac{(-1/2 - x/2)}{x^2}$ имеют особенность в точке $x_0 = 0$, следовательно, $p(x)$ и $q(x)$ разлагаются в ряд (4.14). По теореме (2) имеется хотя бы одно решение в виде обобщенного степенного ряда.

По формуле (4.17)

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{(3/2 - x)}{x} = 3/2, \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{(-1/2 - x/2)}{x^2} = -1/2.$$

Составим определяющее уравнение (4.16):

$$r(r-1) + 3/2r - 1/2 = 0,$$

откуда $r_1 = 1/2$ и $r_2 = -1$. Разность r_1 и r_2 равна $3/2$, не является целым числом, следовательно, из утверждения (1) получается, что имеются два линейно независимых решения y_1 и y_2 в виде обобщенных степенных рядов:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} x^{k+1/2}, \quad y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^{k-1}. \quad (4.23)$$

Подставляем y_1 в уравнение (4.21):

$$\begin{aligned} & 2x^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} (k+1/2)(k-1/2)x^{k-3/2} + 3x \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} (k+1/2)x^{k-1/2} - \\ & - 2x^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} (k+1/2)x^{k-1/2} - x \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} x^{k+1/2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} x^{k+1/2} = 0. \end{aligned}$$

Получаем систему уравнений на $c_k^{(1)}$:

при $x^{1/2}$: $0 \equiv 0$, т.е. $c_0^{(1)}$ - произвольное;

при $x^{3/2}$: $2c_1^{(1)} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3c_1^{(1)} \frac{3}{2} - 2c_0^{(1)} \frac{1}{2} - c_0^{(1)} - c_1^{(1)} = 0$;

при $x^{5/2}$: $2c_2^{(1)} \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} + 3c_2^{(1)} \frac{5}{2} - 2c_1^{(1)} \frac{3}{2} - c_1^{(1)} - c_2^{(1)} = 0$;

.....
 при $x^{k+1/2}$: $c_k^{(1)} (k+1/2)(k-1/2) + 3c_k^{(1)} (k+1/2) - 2c_{k-1}^{(1)} (k-1/2) - c_{k-1}^{(1)} - c_k^{(1)} = 0$.

Тогда коэффициенты имеют вид

$$c_1^{(1)} = \frac{2}{5}c_0^{(1)}, \quad c_2^{(1)} = \frac{2}{7}c_1^{(1)} = \frac{2^2}{5 \cdot 7}c_0^{(1)}, \dots, \quad c_k^{(1)} = \frac{2c_{k-1}^{(1)}}{2k+3} = \frac{2^k c_0^{(1)}}{5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2k+3)}.$$

Положим $c_0^{(1)} = 1$ и подставим коэффициенты $c_k^{(1)}$ в (4.23):

$$y_1 = |x|^{1/2} \left(1 + \frac{2x}{5} + \frac{(2x)^2}{5 \cdot 7} + \frac{(2x)^3}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{(2x)^k}{5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2k+3)} \dots \right).$$

Аналогично находим y_2 :

$$y_2 = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^{k-1}}{k!} + \dots = \frac{e^x}{x}.$$

Найти решения уравнений:

66. $9x^2y'' - (x^2 - 2)y = 0$.

67. $x^2y'' + 2xy' - (x^2 + 2x + 2)y = 0$.

68. $xy'' + y' - xy = 0$.

Ответы:

66. $y_1 = x^{1/3} \left(1 + \frac{x^2}{5 \cdot 6} + \frac{x^4}{5 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 12} + \dots \right)$, $y_2 = x^{2/3} \left(1 + \frac{x^2}{6 \cdot 7} + \frac{x^4}{6 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 13} + \dots \right)$.

67. $y_1 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{40} + \frac{7x^4}{720} \dots$, $y_2 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{5} + \frac{x^4}{20} + \dots$

68. $y_1 = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$, $y_2 = \left(1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \dots \right) \ln|x| - \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} - \dots$

Литература

- [1] Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск: Виша шк., 1980.
- [2] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.. Дифференциальные уравнения: Примеры и задачи. Киев: Виша шк., 1984.
- [3] Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.; Ижевск: Изд. РХД, 2000.
- [4] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.
- [5] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. М.: Едиториал УРСС, 2002.
- [6] Есипов А.А., Сазанов Л.И., Юдович В.И.. Руководство к решению по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ростов-на-Дону: Изд. Ростовского университета, 1989.

Мухарлямов Руслан Камилевич
Панкратьева Татьяна Николаевна

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Методическое пособие

Подписано в печать 12.05.2009 г.
Форм. бум. 60x84 1/16. Гарнитура “Таймс”. Печать ризографическая.
Печ.л. 3,75. Т.100. З.171.

Лаборатория оперативной полиграфии Издательства КГУ
420045, Казань, ул.Кр.Позиция, 2а
Тел. 231-52-12

