

1.3 Нестрогий экстремум

$$d^2 f \geq 0 \text{ или } d^2 f \leq 0$$

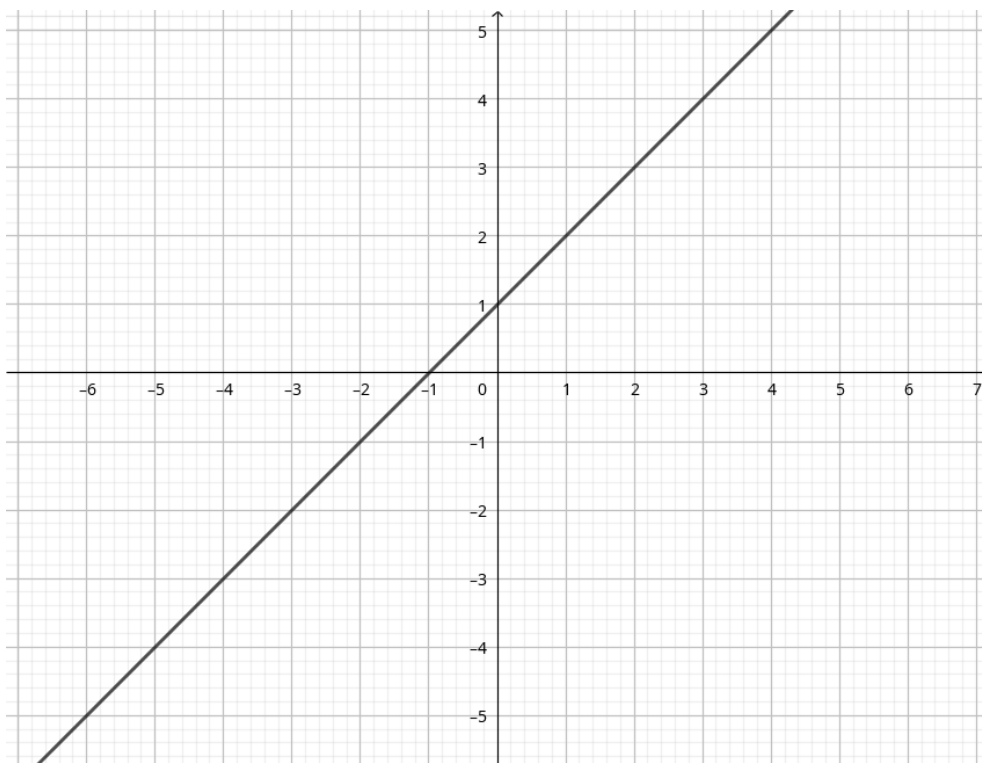
№ 3623:

$$z(x, y) = (x - y + 1)^2 \tag{18}$$

$$dz = 2(x - y + 1)(dx - dy) \tag{19}$$

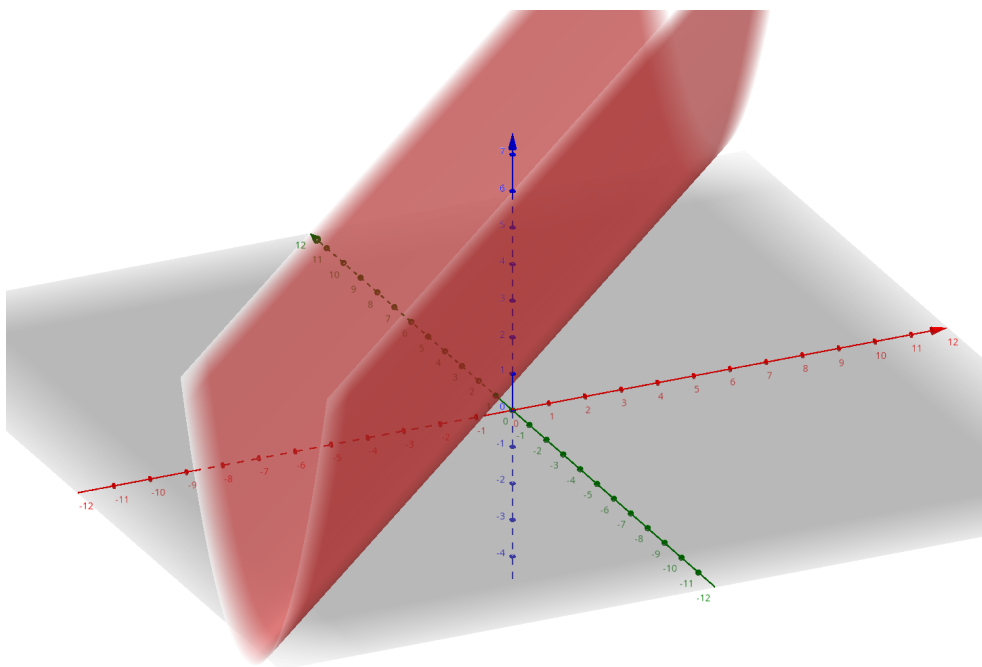
$$dz = 0, \quad \Rightarrow \quad x - y + 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad y = x + 1 \tag{20}$$

Решения образуют прямую.



$$d^2 z = 2(dx - dy)(dx - dy) = 2(dx - dy)^2 \geq 0 \tag{21}$$

нестрогий минимум.



Решить самим: № 3621, 3622, 3644, 3646.

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + 2x\lambda = 0 \\ \frac{1}{b} + 2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda a} \\ y = -\frac{1}{2\lambda b} \\ \left(\frac{1}{2\lambda a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda b}\right)^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (31)$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 4\lambda^2 \quad (32)$$

$$4\lambda^2 = \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2} \quad (33)$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{2ab} \quad (34)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \pm \frac{2ab}{\sqrt{b^2 + a^2}} \quad (35)$$

Две точки:

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}, \\ y = -\frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}, \\ y = \frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}}. \end{cases} \quad (36)$$

Из (27):

$$x dx + y dy = 0, \quad (37)$$

$$dy = -\frac{x}{y} dx. \quad (38)$$

$$dz = \frac{dx}{a} + \frac{dy}{b} = \frac{dx}{a} - \frac{x}{y} \frac{dx}{b} = \left(\frac{1}{a} - \frac{x}{y} \frac{1}{b}\right) dx \quad (39)$$

Ещё раз (38):

$$\begin{aligned} d^2 z &= d\left(\frac{1}{a} - \frac{x}{y} \frac{1}{b}\right) dx = -\frac{dx}{b} d\frac{x}{y} = -\frac{dx}{b} \frac{y dx - x dy}{y^2} = \frac{x dy - y dx}{y^2} \frac{dx}{b} = \\ &= \frac{-\frac{x^2}{y} dx - y dx}{y^2} \frac{dx}{b} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} \frac{(dx)^2}{b} \end{aligned} \quad (40)$$

(27):

$$d^2 z = -\frac{1}{y^3} \frac{(dx)^2}{b}. \quad (41)$$

Точка первая:

$$y = -\frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}} \quad \frac{1}{y^3} = -\frac{(b^2 + a^2)^{3/2}}{a^3} \quad (42)$$

$$d^2 z = \frac{(b^2 + a^2)^{3/2}}{a^3} \frac{(dx)^2}{ab} = \frac{(b^2 + a^2)^{3/2}}{a^4 b} (dx)^2 \quad (43)$$

$\text{sgn}(d^2 z) = \text{sgn } b$

Точка вторая:

$$y = \frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}} \quad \frac{1}{y^3} = \frac{(b^2 + a^2)^{3/2}}{a^3} \quad (44)$$

$$d^2 z = -\frac{(b^2 + a^2)^{3/2}}{a^4 b} (dx)^2 \quad (45)$$

$\text{sgn}(d^2 z) = -\text{sgn } b$.

Решить самим: № 3654, 3659, 3663.