1 Векторы и базисы в линейном пространстве

Базис (правило Эйнштейна) $\vec{x} \in L$, $\vec{e}_k \in L$

$$(\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n) \tag{1}$$

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + \dots + x^n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x^i\vec{e}_i = x^i\vec{e}_i \tag{2}$$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)\, X \tag{3}$$

Новый базис:

$$(\vec{e}'_1 \dots \vec{e}'_n) = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)\, S, \tag{4}$$

S - матрица перехода.

$$S = \begin{pmatrix} e^1_1 & e^1_2 & \cdots & e^1_n \\ e^2_1 & e^2_2 & \cdots & e^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^n_1 & e^n_2 & \cdots & e^n_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$SS^{-1} = S^{-1}S = E, \quad e^i_k \left(e^{-1}\right)^k_j = \left(e^{-1}\right)^i_k e^k_j = \delta^i_j \tag{6}$$

Смена базиса для вектора:

$$\vec{x} = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)\, X = (\vec{e}'_1 \dots \vec{e}'_n)\, X' = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)\, SX' \tag{7}$$

$$(\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)\,(X - SX') = 0 \tag{8}$$

$$\vec{e}_i \left(x^i - e^i_k x'^k\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{x^i = e^i_k x'^k} \tag{9}$$

$$X - SX' = 0 \tag{10}$$

$$X = SX', \qquad X' = S^{-1}X \tag{11}$$

$$\boxed{x'^i = \left(e^{-1}\right)^i_k x^k} \tag{12}$$

2 Ковекторы и дуальные базисы в дуальном пространстве

Лин. форма (ковектор)

$$\varphi : L \to \mathbb{R}\varphi\left(\vec{x}\right) = \varkappa \tag{13}$$

$$\varphi\left(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}\right) = \alpha\varphi\left(\vec{x}\right) + \beta\varphi\left(\vec{y}\right) \tag{14}$$

$$\varphi\left(\vec{x}\right) = \varphi\left(x^1\vec{e}_1 + \dots + x^n\vec{e}_n\right) = x^1\varphi\left(\vec{e}_1\right) + \dots + x^n\varphi\left(\vec{e}_n\right) \tag{15}$$

$$\varphi\left(\vec{e}_k\right) \equiv \varphi_k, \qquad \varphi\left(\vec{x}\right) = x^k\varphi_k \tag{16}$$

Сумма форм

$$\left(\varphi + \psi\right)\left(\vec{x}\right) = \varphi\left(\vec{x}\right) + \psi\left(\vec{x}\right) = x^k\left(\varphi_k + \psi_k\right) \tag{17}$$

Умножение формы на число

$$\alpha\varphi\left(\vec{x}\right) = \alpha x^k\varphi_k = x^k\left(\alpha\varphi_k\right) \tag{18}$$

$\varphi \in L^*$ - дуальное пространство к L, φ - ковекторы.

Базисные формы:

$$\epsilon^1 = (1, 0, \dots, 0)\,, \quad \epsilon^2 = (0, 1, \dots, 0)\,, \qquad \dots \qquad \epsilon^n = (0, 0, \dots, 1) \tag{19}$$

$$\epsilon^i\left(\vec{e}_k\right) = \delta^i_k \tag{20}$$

$$\varphi_i\epsilon^i\left(\vec{x}\right) = \varphi_i\epsilon^i\left(x^k\vec{e}_k\right) = x^k\varphi_i\epsilon^i\left(\vec{e}_k\right) = x^k\varphi_i\delta^i_k = x^k\varphi_k = \varphi\left(\vec{x}\right) \tag{21}$$

$\epsilon^1 \dots \epsilon^n$ - базис в $\overset{*}{L}$, дуальный к $(\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)$.

Смена базиса для ковектора:

$$\varphi\left(\vec{x}\right) = x'^k\varphi'_k = x^i\varphi_i = e^i_k x'^k\varphi_i \tag{22}$$

$$x'^k\left(\varphi'_k - e^i_k\varphi_i\right) = 0, \quad \forall\vec{x} \tag{23}$$

$$x'^k = \delta^k_1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi'_1 - e^i_1\varphi_i = 0, \quad \Longrightarrow \quad \varphi'_1 = e^i_1\varphi_i \tag{24}$$

$$x'^k = \delta^k_2 \quad \Longrightarrow \quad \varphi'_2 - e^i_2\varphi_i = 0, \quad \Longrightarrow \quad \varphi'_2 = e^i_2\varphi_i \tag{25}$$

и т.д.

$$\boxed{\varphi'_k = e^i_k\varphi_i, \quad \varphi_i = \left(e^{-1}\right)^k_i \varphi'_k} \tag{26}$$

3 Тензоры

Понятие тензора

$$T:\underbrace{L\times\cdots\times L}_{p}\times\underbrace{\overset{*}{L}\times\cdots\times\overset{*}{L}}_{q}\to\mathbb{R} \tag{27}$$

$$T\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right)=\alpha\in\mathbb{R},\qquad \vec{x}_\alpha\in L,\quad \omega^\beta\in L^* \tag{28}$$

$$T\left(\vec{x}_1,\ldots,a\vec{x}_\alpha+b\vec{y},\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right)=aT\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_\alpha,\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right)+bT\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{y},\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right) \tag{29}$$

$$\vec{x}_\alpha=x^i_\alpha\vec{e}_i\in L,\quad \omega^j=\omega^\beta_j\epsilon^j\in L^*,\quad \epsilon^j\left(\vec{e}_i\right)=\delta^j_i. \tag{30}$$

$$\begin{gathered}T\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right)=T\left(x^{i_1}_1\vec{e}_{i_1},\ldots,x^{i_p}_p\vec{e}_{i_p},\,\omega^1_{j_1}\epsilon^{j_1},\ldots,\omega^q_{j_q}\epsilon^{j_q}\right)=\\ =x^{i_1}_1\ldots x^{i_p}_p\omega^1_{j_1}\ldots\omega^q_{j_q}T\left(\vec{e}_{i_1},\ldots,\vec{e}_{i_p},\,\epsilon^{j_1},\ldots,\epsilon^{j_q}\right)=x^{i_1}_1\ldots x^{i_p}_p\omega^1_{j_1}\ldots\omega^q_{j_q}T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p},\end{gathered} \tag{31}$$

где

$$T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\equiv T\left(\vec{e}_{i_1},\ldots,\vec{e}_{i_p},\,\epsilon^{j_1},\ldots,\epsilon^{j_q}\right). \tag{32}$$

Преобразование компонент тензоров при смене базиса

$$x^i=e^i_{i'}x^{i'},\qquad \omega_j=\left(e^{-1}\right)^{j'}_j\omega_{j'} \tag{33}$$

$$\begin{gathered}T=x^{i'_1}_1\ldots x^{i'_p}_p\omega^1_{j'_1}\ldots\omega^q_{j'_q}T^{j'_1\ldots j'_q}_{i'_1\ldots i'_p}=x^{i_1}_1\ldots x^{i_p}_p\omega^1_{j_1}\ldots\omega^q_{j_q}T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}=\\ =\left(e^{i_1}_{i'_1}x^{i'_1}_1\right)\ldots\left(e^{i_p}_{i'_p}x^{i'_p}_p\right)\cdot\left[\left(e^{-1}\right)^{j'_1}_{j_1}\omega^1_{j'_1}\right]\ldots\left[\left(e^{-1}\right)^{j'_q}_{j_q}\omega^q_{j'_q}\right]\cdot T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\end{gathered} \tag{34}$$

$$x^{i'_1}_1\ldots x^{i'_p}_p\omega^1_{j'_1}\ldots\omega^q_{j'_q}T^{j'_1\ldots j'_q}_{i'_1\ldots i'_p}-e^{i_1}_{i'_1}x^{i'_1}_1\ldots e^{i_p}_{i'_p}x^{i'_p}_p\cdot\left(e^{-1}\right)^{j'_1}_{j_1}\omega^1_{j'_1}\ldots\left(e^{-1}\right)^{j'_q}_{j_q}\omega^q_{j'_q}\cdot T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}=0 \tag{35}$$

$$x^{i'_1}_1\ldots x^{i'_p}_p\omega^1_{j'_1}\ldots\omega^q_{j'_q}\left[T^{j'_1\ldots j'_q}_{i'_1\ldots i'_p}-e^{i_1}_{i'_1}\ldots e^{i_p}_{i'_p}\cdot\left(e^{-1}\right)^{j'_1}_{j_1}\ldots\left(e^{-1}\right)^{j'_q}_{j_q}\cdot T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\right]=0 \tag{36}$$

$\forall\ x^{i_1}_1\ldots x^{i_p}_p\omega^1_{j_1}\ldots\omega^q_{j_q}$:

$$\boxed{T^{j'_1\ldots j'_q}_{i'_1\ldots i'_p}=e^{i_1}_{i'_1}\ldots e^{i_p}_{i'_p}\cdot\left(e^{-1}\right)^{j'_1}_{j_1}\ldots\left(e^{-1}\right)^{j'_q}_{j_q}\cdot T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}} \tag{37}$$

Вектор - тоже тензор:

$$\vec{x}\left(\varphi\right)\equiv\varphi\left(\vec{x}\right)=x^i\varphi_i\in\mathbb{R}$$

4 Действия с тензорами

4.1 Умножение на число

$$S\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right)=aT\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right) \tag{38}$$

$$S^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}=aT^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} \tag{39}$$

4.2 Умножение

$$T_1\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right)=\alpha,\qquad T_2\left(\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_s,\nu^1,\ldots,\nu^t\right)=\beta \tag{40}$$

$$T_1\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right)T_2\left(\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_s,\nu^1,\ldots,\nu^t\right)=\alpha\beta \tag{41}$$

$$\begin{gathered}T_1\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right)T_2\left(\vec{y}_1,\ldots,\underline{a\vec{y}_k+b\vec{z}},\ldots,\vec{y}_s,\nu^1,\ldots,\nu^t\right)=\\ =aT_1\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right)T_2\left(\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_k,\ldots,\vec{y}_s,\nu^1,\ldots,\nu^t\right)+bT_1\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right)T_2\left(\vec{y}_1,\ldots,\vec{z},\ldots,\vec{y}_s,\nu^1,\ldots,\nu^t\right)\end{gathered} \tag{42}$$

$$T_1\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p,\omega^1,\ldots,\omega^q\right)T_2\left(\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_s,\nu^1,\ldots,\nu^t\right)\equiv S\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p,\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_s,\omega^1,\ldots,\omega^q,\nu^1,\ldots,\nu^t\right) \tag{43}$$

$$S^{j_1\ldots j_{q+t}}_{i_1\ldots i_{p+s}}\equiv S\left(\vec{e}_{i_1},\ldots,\vec{e}_{i_p},\vec{e}_{i_{p+1}},\ldots,\vec{e}_{i_{p+s}},\epsilon_{j_1},\ldots,\epsilon_{j_q},\epsilon_{j_{q+1}},\ldots,\epsilon_{j_{q+t}}\right)=\left(T_1\right)^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\left(T_2\right)^{j_1\ldots j_t}_{i_1\ldots i_s} \tag{44}$$

пример двух векторов

$$\vec{x}\left(\omega\right)\vec{y}\left(\nu\right)=x^iy^k\omega_i\nu_k \tag{45}$$

Аргументы должны быть разные: рассмотрим $\vec{x}\left(\omega\right)\vec{y}\left(\omega\right)$:

$$\begin{gathered}\vec{x}\left(\alpha\omega+\beta\nu\right)\vec{y}\left(\alpha\omega+\beta\nu\right)=\alpha\vec{x}\left(\omega\right)\vec{y}\left(\alpha\omega+\beta\nu\right)+\beta\vec{x}\left(\nu\right)\vec{y}\left(\alpha\omega+\beta\nu\right)=\\ =\left[\alpha^2\vec{x}\left(\omega\right)\vec{y}\left(\omega\right)+\alpha\beta\vec{x}\left(\omega\right)\vec{y}\left(\nu\right)\right]+\left[\alpha\beta\vec{x}\left(\nu\right)\vec{y}\left(\omega\right)+\beta^2\vec{x}\left(\nu\right)\vec{y}\left(\nu\right)\right]=\\ =\alpha^2\vec{x}\left(\omega\right)\vec{y}\left(\omega\right)+\alpha\beta\left[\vec{x}\left(\omega\right)\vec{y}\left(\nu\right)+\vec{x}\left(\nu\right)\vec{y}\left(\omega\right)\right]+\beta^2\vec{x}\left(\nu\right)\vec{y}\left(\nu\right)\neq\\ \neq\alpha\vec{x}\left(\omega\right)\vec{y}\left(\omega\right)+\beta\vec{x}\left(\nu\right)\vec{y}\left(\nu\right)\end{gathered} \tag{46}$$

4.3 Сложение

$$S = T_1 + T_2 = \alpha + \beta, \tag{47}$$

$$T_1\left(\vec{x}_1, \dots, \omega^q\right) + T_2\left(\dots, a\vec{y}_k + b\vec{z}, \dots\right) = T_1 + aT_2\left(\dots, \vec{y}_k, \dots\right) + bT_2\left(\dots, \vec{z}, \dots\right) \neq a\left(T_1 + T_2\right) + b\left(T_1 + T_2\right) \tag{48}$$

$$\left(T_1 + T_2\right)\left(\vec{x}_1, \dots, \omega^q\right) = T_1\left(\vec{x}_1, \dots, \omega^q\right) + T_2\left(\vec{x}_1, \dots, \omega^q\right) = S\left(\vec{x}_1, \dots, \omega^q\right) \tag{49}$$

Аргументы одинаковые.

$$S^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} = \left(T_1\right)^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} + \left(T_2\right)^{j_1\dots j_t}_{i_1\dots i_s} \tag{50}$$

4.4 Перестановка индексов

$$S\left(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, \omega^1, \dots \omega^k, \dots \omega^m, \dots, \omega^q\right) \equiv T\left(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, \omega^1, \dots \omega^m, \dots \omega^k, \dots, \omega^q\right) \tag{51}$$

$$T^{j_1\dots k\dots m\dots j_q}_{i_1\dots i_p} \longrightarrow S^{j_1\dots k\dots m\dots j_q}_{i_1\dots i_p} = T^{j_1\dots m\dots k\dots j_q}_{i_1\dots i_p} \tag{52}$$

(аналогично снизу)

4.4.1 Симметризация

$$T^{j_1\dots(j_k\dots j_q)}_{i_1\dots i_p} = \frac{1}{(q-k+1)!}\sigma^{j_k\dots j_q}_{j'_k\dots j'_q} T^{j_1\dots j'_k\dots j'_q}_{i_1\dots i_p} \tag{53}$$

$$\sigma^{j_k\dots j_q}_{j'_k\dots j'_q} = \begin{cases} 1, & \left\{j_k, \dots, j_q\right\} = \left\{j'_k, \dots, j'_q\right\} \\ 0 \end{cases} \tag{54}$$

Двухиндексный пример:

$$A^{(ik)} = \frac{1}{2}\left(A^{ik} + A^{ki}\right) \tag{55}$$

Трёхиндексный пример:

$$B^{(ijk)} = \frac{1}{6}\left(B^{ijk} + B^{ikj} + B^{kij} + B^{kji} + B^{jki} + B^{jik}\right) \tag{56}$$

4.4.2 Антисимметризация

Нечётные перестановки - с минусом:

$$T^{j_1\dots[j_k\dots j_q]}_{i_1\dots i_p} = \frac{1}{(q-k+1)!}\delta^{j_k\dots j_q}_{j'_k\dots j'_q} T^{j_1\dots j'_k\dots j'_q}_{i_1\dots i_p} \tag{57}$$

$$A^{[ik]} = \frac{1}{2}\left(A^{ik} - A^{ki}\right) \tag{58}$$

$$B^{[ijk]} = \frac{1}{6}\left(B^{ijk} - B^{ikj} + B^{kij} - B^{kji} + B^{jki} - B^{jik}\right) \tag{59}$$

4.5 Свёртка индексов

$$T\left(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, \omega^1, \dots, \omega^q\right) \longrightarrow T^{j_1\dots j_{k-1}j_k j_{k+1}\dots j_q}_{i_1\dots i_{m-1}i_m i_{m+1}\dots i_p} \longrightarrow \left(\sum_{r=1}^{n}\right) T^{j_1\dots j_{k-1}r j_{k+1}\dots j_q}_{i_1\dots i_{m-1}r i_{m+1}\dots i_p} = S^{j_1\dots j_{k-1}j_{k+1}\dots j_q}_{i_1\dots i_{m-1}i_{m+1}\dots i_p} \longrightarrow \\ \longrightarrow S\left(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{p-1}, \omega^1, \dots, \omega^{q-1}\right). \tag{60}$$

При смене базиса:

$$S^{j'_1\dots j'_{k-1}j'_{k+1}\dots j'_q}_{i'_1\dots i'_{m-1}i'_{m+1}\dots i'_p} = T^{j'_1\dots r'\dots j'_q}_{i'_1\dots r'\dots i'_p} = \left[e^{i_1}_{i'_1}\dots \underline{e^{r_2}_{r'}}\dots e^{i_p}_{i'_p}\right]\left[\left(e^{-1}\right)^{j'_1}_{j_1}\dots \underline{\left(e^{-1}\right)^{r'}_{r_1}}\dots \left(e^{-1}\right)^{j'_q}_{j_q}\right] T^{j_1\dots r_1\dots j_q}_{i_1\dots r_2\dots i_p} = \\ = \left[e^{i_1}_{i'_1}\dots e^{i_p}_{i'_p}\right]\left[\left(e^{-1}\right)^{j'_1}_{j_1}\dots \left(e^{-1}\right)^{j'_q}_{j_q}\right] e^{r_2}_{r'}\left(e^{-1}\right)^{r'}_{r_1} T^{j_1\dots r_1\dots j_q}_{i_1\dots r_2\dots i_p}; \tag{61}$$

$$e^{r_2}_{r'}\left(e^{-1}\right)^{r'}_{r_1} T^{j_1\dots r_1\dots j_q}_{i_1\dots r_2\dots i_p} = \delta^{r_2}_{r_1} T^{j_1\dots r_1\dots j_q}_{i_1\dots r_2\dots i_p} = T^{j_1\dots r_1\dots j_q}_{i_1\dots r_1\dots i_p} = S^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} \tag{62}$$

$$S^{j'_1\dots j'_{k-1}j'_{k+1}\dots j'_q}_{i'_1\dots i'_{m-1}i'_{m+1}\dots i'_p} = \left[e^{i_1}_{i'_1}\dots e^{i_p}_{i'_p}\right]\left[\left(e^{-1}\right)^{j'_1}_{j_1}\dots \left(e^{-1}\right)^{j'_q}_{j_q}\right] S^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} \tag{63}$$

- тензорный закон преобразования.

5 Некоторые тензоры

5.1 Тензор Кронекера ($n = 4$)

$$\delta_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_k \ldots j_q} \delta_{j_k}^m = T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots 1 \ldots j_q} \delta_1^m + \cdots + T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots m \ldots j_q} \delta_m^m + \cdots + T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots n \ldots j_q} \delta_n^m = \\ = 0 + \cdots + T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots m \ldots j_q} \cdot 1 + \cdots + 0 = T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots m \ldots j_q} \end{aligned} \tag{65}$$

$$\delta_{j'}^{i'} = S_{j'}^j \left(S^{-1}\right)_i^{i'} \delta_j^i = S_{j'}^j \left(S^{-1}\right)_j^{i'} = S_{j'}^j \left(S^{-1}\right)_j^{i'} = \left(S^{-1}\right)_j^{i'} S_{j'}^j = \left(S^{-1} \cdot S\right)_{j'}^{i'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{66}$$

компоненты сохраняются при смене базиса.

5.2 Скалярное произведение

$$(X \cdot Y) = G(X, Y) = g_{ik} x^i y^k \in \mathbb{R} \tag{67}$$

Симметрия:

$$g_{ik} = g_{ki}, \qquad \det \|g_{ik}\| \neq 0 \tag{68}$$

Метрика в дуальном пространстве:

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j \tag{69}$$

$$(\varphi \cdot \omega) = \tilde{G}(\varphi, \omega) = g^{kj} \varphi_k \omega_j \tag{70}$$

Тензор Минковского:

$$\eta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \eta^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{71}$$

$$\eta^{ik} \eta_{kj} = \delta_j^i \tag{72}$$

Поднятие и опускание индексов

$$T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_{k-1} j_k j_{k+1} \ldots j_q} g_{j_k m} = T_{i_1 \ldots i_p m}^{j_1 \ldots j_{k-1} j_{k+1} \ldots j_q} \tag{73}$$

$$A_{ij\cdot}^{\cdot\cdot m} = A_{ijk} g^{km}, \quad A_{i\cdot k}^{\cdot m \cdot} = A_{ijk} g^{jm}, \quad R_{tjkl} = R_{\cdot jkl}^{i} g_{it} \tag{74}$$