1 Полезные интегралы

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right], \tag{1}$$

$k, n \in \mathbb{Z}$; $k, n \geqslant 0$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos\left(k+n\right)x+\cos\left(k-n\right)x\right]dx = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(k+n\right)x}{k+n}+\frac{\sin\left(k-n\right)x}{k-n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(k+n\right)\pi}{k+n}+\frac{\sin\left(k-n\right)\pi}{k-n}+\frac{\sin\left(k+n\right)\pi}{k+n}+\frac{\sin\left(k-n\right)\pi}{k-n}\right] = 0,$$

$k+n \neq 0$ $k-n \neq 0$.

1) $k+n \neq 0$, $k-n \neq 0$ (уже рассмотрели),
2) $k+n = 0$, $k-n \neq 0$,
3) $k+n \neq 0$, $k-n = 0$,
4) $k+n = 0$, $k-n = 0$.

Пусть $k+n = 0$, $k = -n$. $k, n \geqslant 0 \Longrightarrow k = n = 0$, $k-n = 0$. Значит, мы рассматриваем четвёртый случай, а второй невозможен.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}1\cdot 1 dx = 2\pi. \tag{3}$$

Третий случай, $k = n \neq 0$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\sin\left(2kx\right)}{2}dx =$$

$$= \left[\frac{x}{2}+\frac{\cos\left(2kx\right)}{4k}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi+\frac{\cos\left(2k\pi\right)}{4k}-\frac{\cos\left(2k\pi\right)}{4k} = \pi. \tag{4}$$

Итак,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx dx = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \pi, & k = n \neq 0, \\ 2\pi, & k = n = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Задание: аналогично получить всевозможные результаты для интегралов

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx dx. \tag{6}$$

2 Ряд Фурье на одном обороте

Пусть на $x \in [-\pi, \pi]$

$$f\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \tag{7}$$

(*ряд Фурье*).

$$f\left(x\right)\cos kx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos nx\cos kx+b_n\sin nx\cos kx\right) \tag{8}$$

$k > 0$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos kx dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos nx\cos kx+b_n\sin nx\cos kx\right)dx = \tag{9}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx dx+b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\pi\delta_{nk}+b_n\cdot 0\right) = \pi a_k.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos kx dx. \tag{10}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = 2\pi a_0, \tag{11}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \tag{12}$$

(От обозначений в Демидовиче мои отличаются расположением $\frac{1}{2}$ при a_0).

$$f(x)\sin kx = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx \sin kx + b_n \sin nx \sin kx)\,, \tag{13}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx \sin kx + b_n \sin nx \sin kx)\,dx = \tag{14}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx + b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot 0 + b_n \pi \delta_{nk}) = b_k \pi,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \tag{15}$$

заменим обратно:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ny dy, \qquad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy, \tag{16}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ny dy. \tag{17}$$

Задание: понять, почему мы не ищем b_0.

3 Ряд Фурье на симметричном отрезке

Пусть $x \in [-l, l]$ Введём

$$y = \frac{\pi x}{l}, \qquad x = \frac{ly}{\pi}, \tag{18}$$

$$g(y) = f(x) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right). \tag{19}$$

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny)\,, \tag{20}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos ny dy, \qquad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y)\,dy, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin ny dy. \tag{21}$$

Обратно:

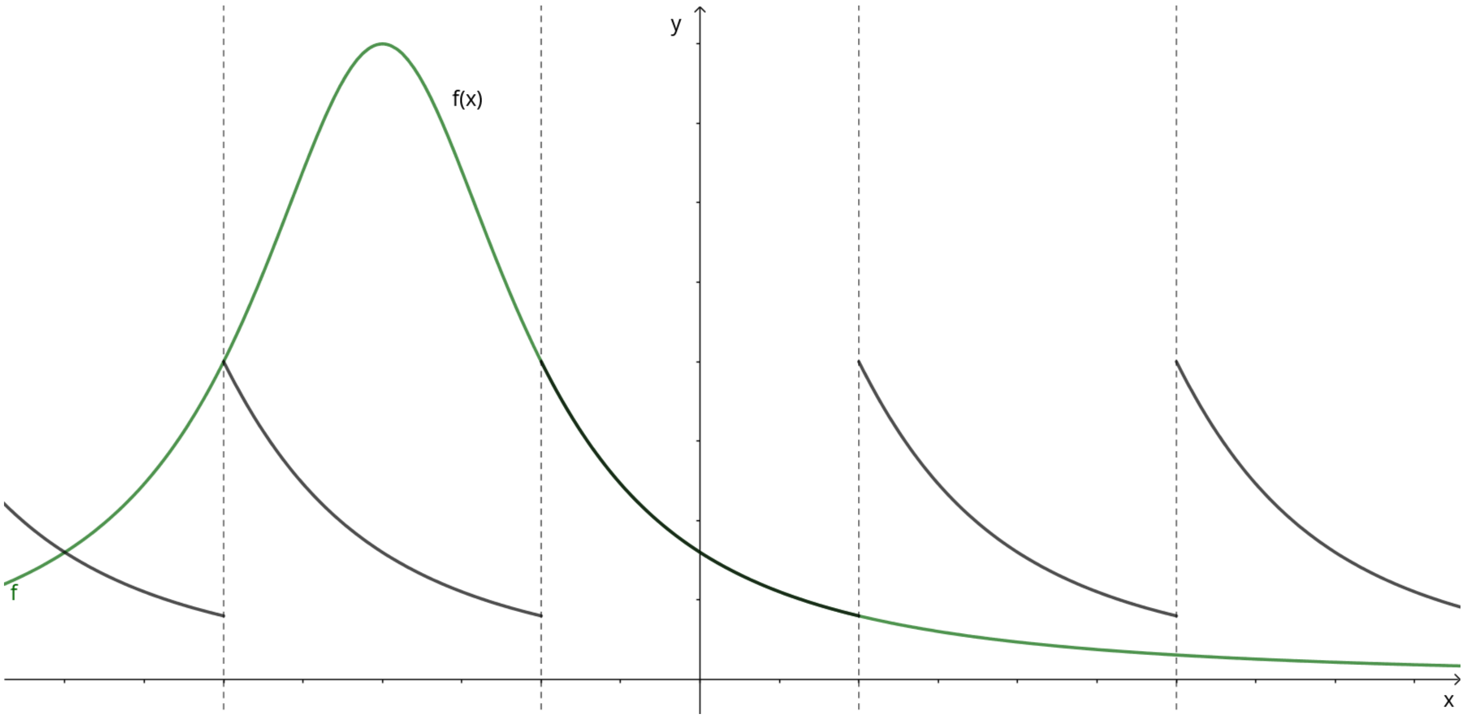
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right), \tag{22}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos ny dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n\frac{\pi x}{l} d\frac{\pi x}{l} = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \tag{23}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y)\,dy = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\frac{\pi x}{l} = \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx, \tag{24}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin ny dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n\frac{\pi x}{l} d\frac{\pi x}{l} = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \tag{25}$$

4 Периодичность ряда



5 Чётность

Пусть $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Тогда

$$\int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx = \int_{-a}^{0} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx = \tag{26}$$

$x = -y$; $x = y$

$$= -\int_{a}^{0} \varphi(-y)\,dy + \int_{0}^{a} \varphi(y)\,dy = -\int_{0}^{a} \varphi(y)\,dy + \int_{0}^{a} \varphi(y)\,dy = 0.$$

Пусть теперь $\psi(-x) = \psi(x)$. Тогда

$$\int_{-a}^{a} \psi(x)\,dx = \int_{-a}^{0} \psi(x)\,dx + \int_{0}^{a} \psi(x)\,dx = \tag{27}$$

$$= -\int_{a}^{0} \psi(-y)\,dy + \int_{0}^{a} \psi(y)\,dy = \int_{0}^{a} \psi(y)\,dy + \int_{0}^{a} \psi(y)\,dy = 2\int_{0}^{a} \psi(y)\,dy = 2\int_{0}^{a} \psi(x)\,dx.$$

Для чётной функции $f(x)$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \tag{28}$$

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,dx, \tag{29}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = 0; \tag{30}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}. \tag{31}$$

Если же функция $f(x)$ нечётна,

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = 0, \tag{32}$$

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0, \tag{33}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx; \tag{34}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{35}$$

5.1 Пример: №2944

Разложить в ряд Фурье в интервале $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x) = \pi^2 - x^2$.

$l = \pi$, $f(x)$ чётна:

$$f(-x) = \pi^2 - (-x)^2 = \pi^2 - x^2 = f(x), \tag{36}$$

поэтому $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\pi^2 - x^2\right)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\left(\pi^2\pi - \frac{\pi^3}{3}\right) - \left(\pi^2(-\pi) - \frac{(-\pi)^3}{3}\right)\right] = \frac{2}{3}\pi^2 \tag{37}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\pi^2 - x^2\right)\cos nx dx = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\pi^2 - x^2\right)\sin' nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(\pi^2 - x^2\right)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\pi^2 - x^2\right)'\sin nx dx = \frac{2}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = -\frac{2}{\pi n^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos' nx dx = \tag{38}$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}\,x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x'\cos nx dx = -\frac{2}{\pi n^2}\,x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n^3}\,\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2}{\pi n^2}\left[\pi\cos n\pi - (-\pi)\cos n(-\pi)\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}\left[\pi - (-\pi)\right]\cos n\pi = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}.$$

С такими коэффициентами

$$f(x) = \pi^2 - x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx. \tag{39}$$

Кстати, при $x = \pi$: $\cos nx = (-1)^n$,

$$f(\pi) = \pi^2 - \pi^2 = 0 = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}(-1)^n = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \tag{40}$$

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{3}\pi^2, \tag{41}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{42}$$

Задание: решить самостоятельно № 2940, 2942, 2948, 2951.